

FRANCISCO HUMBERTO SIMÕES MAGRO

Ajustamento de Triangulações Geodésicas
pelo método de variação de coordenadas
com e sem injunções iniciais

Dissertação apresentada ao Curso de
Pós-Graduação em Ciências Geodésicas
para a obtenção do Título de Mestre em
Ciências pela Universidade Federal do
Paraná.

CURITIBA

JUNHO/1983

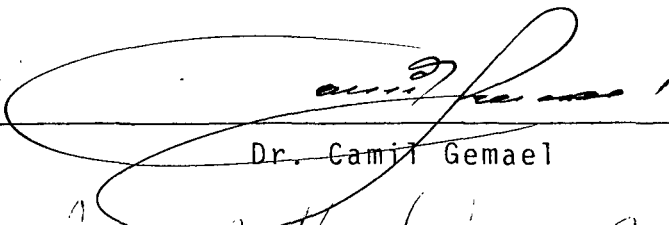
AJUSTAMENTO DE TRIANGULAÇÕES GEODÉSICAS PELO MÉTODO DE VARIAÇÃO
DE COORDENADAS COM E SEM INJUNÇÕES INICIAIS

por

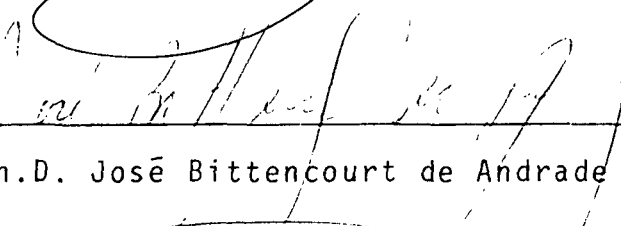
FRANCISCO HUMBERTO SIMÕES MAGRO, Atuário

Dissertação aprovada como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre em Ciências
no Curso de Pós-Graduação em Ciências
Geodésicas, pela Comissão formada pelos
Professores:

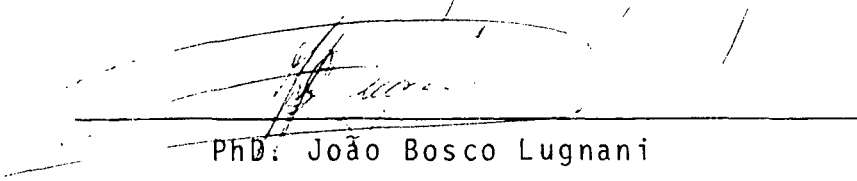
ORIENTADOR:



Dr. Camil Gemael



Ph.D. José Bittencourt de Andrade



Ph.D. João Bosco Lugnani

Curitiba, 15 de julho de 1983.

AGRADECIMENTOS

O autor deseja externar seus agradecimentos às pessoas e entidades abaixo relacionadas:

- Professor Doutor Camil Gemael, pelas críticas e sugestões;
- CAPES, pela bolsa de estudos concedida;
- Curso de Pós-Graduação em Geociências da UFRGS, pela cedência de verba junto ao Centro de Processamento de Dados da mesma Universidade;
- Professores do Departamento de Geodésia da UFRGS, pelo incentivo e confiança depositada;
- Licenciada Marli de J. R. dos Santos, Técnica em Assuntos Culturais da UFRGS pelas correções vernaculares sugeridas;
- Professores e colegas do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução deste trabalho.
- Zuleica Santos, Agente Administrativo da UFRGS, pelo trabalho de datilografia.
- Lorena De Bona, Magda Alexandra e Tânia Estela, esposa e filhas, pelo carinho e incentivo amenizando disforias.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	iii
SUMÁRIO	iv
LISTA DE TABELAS	vi
RESUMO	vii
SUMMARY	viii
1 - INTRODUÇÃO	01
2 - TRIANGULAÇÃO GEODÉSICA	03
2.1 - Introdução	03
2.2 - Classificações e Especificações	06
2.3 - Resolução de Triângulos Geodésicos	09
2.3.1 - Aceitação do Triângulo Esférico	09
2.3.2 - Cálculo do Excesso Esférico	12
2.3.3 - Cálculo do Comprimento dos Lados	14
2.3.4 - Cálculo do Erro de Fechamento	15
2.4 - Transporte de Coordenadas no Elipsóide	15
2.4.1 - Fórmulas de Latitude Média de Gauss	17
2.4.2 - Fórmulas de Puissant	19
3 - AJUSTAMENTO DE TRIANGULAÇÕES GEODÉSICAS	22
3.1 - Introdução	22
3.2 - Equações de Observação ou de Injunção	23
3.2.1 - Equação de Distância	23
3.2.2 - Equação de Injunção de Azimute Geodésico	26
3.2.3 - Equação de Injunção de Azimute de Laplace	29
3.2.4 - Equação de Observação de Ângulo	30
3.2.5 - Equação de Injunção de Coordenadas	31
3.3 - Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados	33
3.4 - Resolução do Sistema de Equações Normais	39
3.4.1 - Característica e Grau de Singularidade	41
3.4.2 - Equações Normais de Solução Única	43
3.4.3 - Equações Normais de Infinitas Soluções	44
3.4.4 - Escolha de uma entre Infinitas Soluções	45

3.5 - Aleatoriedade dos Resultados	46
3.5.1 - Exatidão e Precisão	47
3.5.2 - Matriz Variância-Covariância	50
3.5.3 - Matriz dos Pesos	50
3.5.4 - Lei da Propagação Variância-Covariância	51
3.5.5 - Matriz Variância-Covariância dos Parâmetros Ajustados .	52
3.5.6 - Erro Médio	54
3.5.7 - Variância da Unidade de Peso a Posteriori	54
4 - EXPERIÊNCIAS	57
4.1 - Introdução	57
4.2 - Trecho da Triangulação	57
4.3 - Variância das Observações e das Injunções	58
4.3.1 - Variância para Ângulos	58
4.3.2 - Variância para Azimute de Laplace	59
4.3.3 - Variância para Base	59
4.3.4 - Variância para Injunções de Posição	60
4.4 - Ajustamento Via Álgebra de Cayley	61
4.5 - Ajustamento com Deficiência de Característica	66
4.5.1 - Ajustamento Livre	66
4.5.2 - Ajustamento com Escala Definida	68
4.5.3 - Ajustamento com Orientação Definida	68
4.5.4 - Ajustamento com Posição Definida	68
4.5.5 - Ajustamento com Escala e Orientação Definidas ...	68
4.5.6 - Ajustamento com Escala e Posição Definidas	73
4.5.7 - Ajustamento com Orientação e Posição Definidas ..	73
4.5.8 - Resultados do Ajustamento com Deficiência de Característica	73
4.6 - Resultados Globais	73
4.7 - Programas Computacionais	77
5 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	78
5.1 - Conclusões	78
5.2 - Recomendações	79
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	80
ANEXOS	82

LISTA DE TABELAS

I	- Especificações Técnicas	08
II	- Diferença que se Obtém em mm quando se substitui uma Geodésica por um Arco de Circunferência Máxima	12
III	- Grau de Singularidade para Redes de Triangulações Geodésicas	42
IV	- Precisão das Injunções de Posição	61
V	- Ajustamento com todas Injunções Iniciais	63
VI	- Ajustamento com Dois Vértices de Coordenadas Conhecidas	64
VII	- Ajustamento com um Azimute de Laplace, uma Base e um Vértice de Coordenada Conhecida	65
VIII	- Algumas Distâncias nos Três Ajustamentos	66
IX	- Ajustamento sem Injunções	67
X	- Ajustamento com Escala Definida	69
XI	- Ajustamento com Orientação Definida	70
XII	- Ajustamento com Posição Definida	71
XIII	- Ajustamento com Escala e Orientação Definidas	72
XIV	- Ajustamento com Escala e Posição Definidas	74
XV	- Ajustamento com Orientação e Posição Definidas	75
XVI	- Algumas Distâncias nos Ajustamentos Livres	76
XVII	- Erros Médios dos Ajustamentos	76

RESUMO

Neste trabalho faz-se o ajustamento de uma rede de triangulação geodésica, pelo método de variação de coordenadas, com e sem injunções iniciais. Quando essas são fornecidas, o ajustamento é resolvido pela álgebra de Cayley. Quando a escala, a orientação e a fixação da rede ao elipsóide são suprimidas, no todo ou em parte, então o ajustamento é resolvido com a aplicação de pseudo-inversas.

SUMMARY

In this work the adjustment of a geodetic network triangulation is performed by the method of variation of coordinates, with or without initial constraints. When constraints are given, the adjustment is obtained through Cayley's algebra. When the scale, the orientation and the fixation on the ellipsoid are omitted either, "in totum" or in parts, the adjustment is determined by applying the pseudoinverse of a matrix.

1 - INTRODUÇÃO

Dentre os métodos existentes que permitam o ajustamento de triangulações geodésicas, diversas são as variantes que possibilitam a obtenção de resultados mais ou menos precisos consoante as premissas consideradas.

A pesquisa realizada neste trabalho, ao se comparar o método de variação de coordenadas, para triangulações geodésicas, com e sem injunções iniciais pretende mostrar os resultados obtidos via álgebra de Cayley e via pseudo-inversa respectivamente.

Assim, no capítulo segundo apresenta-se a classificação e as especificações das triangulações geodésicas, a resolução de triângulos geodésicos e o transporte de coordenadas no elipsóide. Estas explanações dão lugar à obtenção das coordenadas aproximadas e ao estabelecimento de critérios para a determinação das variâncias das observações e das injunções que são requisitos básicos.

A seguir, no capítulo terceiro desenvolve-se as equações de observação, as de injunção, a aplicação do método dos mínimos quadrados, a resolução do sistema de equações normais e algumas propriedades estatísticas para reconhecer a fortioridade dos resultados. O desenvolvimento desses assuntos facultam os meios permitidos para o ajustamento de uma triangulação geodésica através do método de variação de coordenadas.

Finalmente, no capítulo quarto apresenta-se a metodologia seguida na pesquisa e os resultados alcançados do ajustamento de um trecho da rede de triangulação brasileira quando se faz as seguintes considerações:

- a) as coordenadas de v̄rtices conhecidos não são ajustadas;
- b) as coordenadas, supra referidas, são tratadas como injunções relativas de posição e sujeitas a correções;
- c) as mesmas coordenadas são tratadas como parâmetros livres;
- d) em outras situações, um azimute de Laplace e uma base são desconsiderados, em parte ou na sua totalidade, com ou sem injunções relativas de posição, perfazendo todas as combinações possíveis.

Espera-se que os resultados desses ajustamentos mostrem as vantagens e desvantagens dos métodos aqui utilizados.

2 - TRIANGULAÇÃO GEODÉSICA

2.1 - Introdução

A Geodésia é a ciência que se preocupa em estudar a forma e as dimensões da Terra* e, assim, oferecer condições para a criação de modelos ou de figuras geométricas que permitam representá-la analítica ou graficamente.

Evidentemente, a finalidade última da Geodésia está em determinar qual é a forma dinâmica do planeta Terra, já que os modelos são simples criações da mente humana, os quais têm conduzido o homem tão-somente a aproximações.

O elipsóide de revolução, também chamado biaxial, é um dos modelos que permite estimar o planeta Terra. É uma figura geométrica que não conduz a representações analíticas inabordáveis, a exemplo de outros modelos mais complexos, porém não necessariamente mais exatos. O elipsóide calculado por Hayford e recomendado, em 1924, na Assembléia de Madri, pela Associação Geodésica Internacional, definido pelos parâmetros:

$$a) \ a = 6378.388 \text{ m} \quad e$$

$$b) \ \alpha = 1:297 \ ,$$

foi utilizado durante longo período de tempo em nosso país como o elipsóide de referência. Entretanto, conforme Gemael (1972, p. 6)⁵, em

* Modernamente essa definição foi ampliada: "procura também determinar os parâmetros do campo da gravidade" Gemael(1982)^{1 2}

1967 a União de Geodésia e Geofísica Internacional recomendou a utilização do Sistema Geodésico de Referência 1967 definido pelas constantes:

$$a) a = 6378.160 \text{ m} ,$$

$$b) GM = 398603 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} ,$$

$$c) J_2 = 10827 \times 10^{-7} \text{ e}$$

$$d) \omega = 72921.151467 \times 10^{-15} \text{ rad.s}^{-1}$$

que, a partir de 1981, passou a ser utilizado no Brasil quando o Sistema Geodésico Brasileiro identifica-se ao Sul-Americano de 1969 (SAD-69), substituindo, assim, o elipsóide de referência calculada por Hayford*. Ao longo desta Dissertação será utilizado como elipsóide o do Sistema Geodésico de Referência 1967.

Para que a Geodésia, como ciência, possa estudar a forma e as dimensões da Terra, põe em prática processos e métodos de medição com a finalidade de definir certas quantidades de pontos que servirão de apoio aos levantamentos topográficos, os quais se incumbirão de minuciar os acidentes locais ou, então, determinar os pontos de controle necessários à restituição fotogramétrica.

Para que um país possa confeccionar as suas cartas, é in dispensável que possua uma malha suficientemente rica de pontos

* A UGGI já definiu o SGR-80

$$a = 6378.137 \text{ m}$$

$$GM = 3986005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$J_2 = 10826,3 \times 10^{-7}$$

de apoio. Mas, em verdade, a existência de tais pontos não tem só essa finalidade, visto que os mesmos são necessários, também, para definir as fronteiras do país. Além desses fins, pode-se, ainda, citar a sua importância como pontos de referência para as amarrações planialtimétricas com vistas à elaboração dos levantamentos topográficos de áreas urbanas e à confecção dos mapas correspondentes, indispensáveis, como cartografia básica para o estudo, a elaboração e a execução de planos diretores, planos viários e outros projetos de engenharia urbana, e, com isso, oferecer condições, bem como orientar os técnicos e os administradores a tomarem decisões corretas e adequadas a cada caso. Mas, no campo da hidrografia, para projetos de irrigação e em outras áreas da vida de um país, será sempre necessária a existência de uma malha rica em pontos de apoio. A existência de redes ricas é possível através do processo da triangulação, que consiste em interligar pontos do terreno, previamente escolhidos e monumentados, formando, assim, determinadas figuras geométricas ao longo de meridianos ou paralelos terrestres. Cada figura é formada por triângulos, nos quais devem ser medidos, sempre que possível, todos os ângulos.

Pretende-se desenvolver, ao longo deste capítulo, no que concerne à triangulação, através de simples abordagem, classificações e especificações técnicas, como e em que condições pode-se substituir um triângulo elipsóidico por um esférico, como calcular o comprimento dos lados, o excesso esférico e o erro de fechamento dos triângulos geodésicos. As fórmulas necessárias para o transporte de coordenadas sobre o elipsóide serão, também, aqui abordadas, quando se falar das fórmulas da latitu-

de média de Gauss e de Puissant, com a resolução do problema direto e inverso.

2.2 - Classificações e Especificações

Diversas são as classificações das triangulações quanto às suas características.

Por exemplo, no que tange à forma de uma triangulação, segundo Domingues (1979, p. 257-8)², pode-se classificá-la em cadeias e em redes. As primeiras caracterizam-se por apresentarem uma densidade de pontos por área menor do que as redes de triangulação. Através das figuras 1 e 2 consegue-se ter uma noção de redes e de cadeias de triangulação, respectivamente.

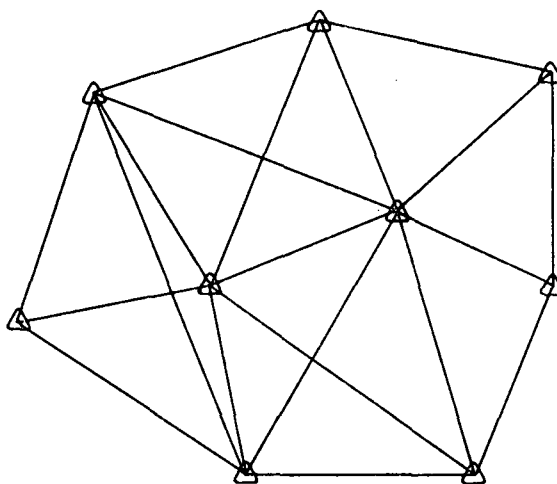


Fig. 1 - Rede de Triangulação

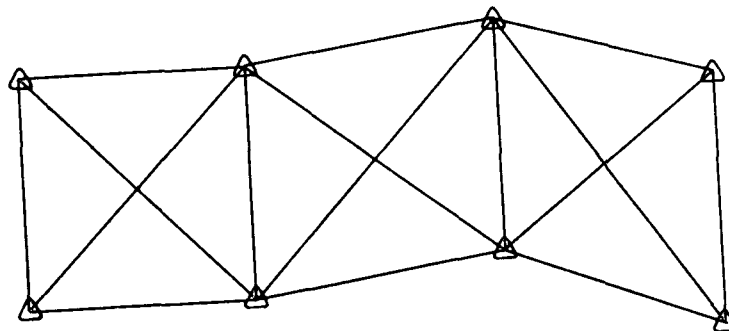


Fig. 2 - Cadeia de Triangulação

No Brasil, devido à sua grande extensão, as triangulações têm-se desenvolvido ao longo de meridianos. E a elaboração de redes, tal como é apresentada aqui, não parece ser viável na atualidade.

Embora tais circunstâncias, o termo rede de triangulação será usado ao longo desta Dissertação pretendendo explicitar qualquer uma das formas aqui descritas.

Quanto à precisão da triangulação, pode-se classificá-la em 1^a, 2^a e 3^a ordens. A triangulação de 1^a ordem, também chamada fundamental ou básica, executada ao longo dos meridianos ou paralelos terrestres, é construída com o maior grau de precisão. Todas as demais redes de triangulação que derivarem da fundamental terão ordens mais elevadas (2^{as} e 3^{as}) mas, em contrapartida, as precisões serão menores.

De acordo com as normas emanadas do Departamento de Comércio dos Estados Unidos (1979, p. 4-5)⁴, pode-se verificar, ainda, que na 2^a e na 3^a ordens existe uma subdivisão em classes I e II, onde, na mesma ordem, a classe mais baixa é sinônimo de menor precisão em relação à outra mais alta. A Tabela I mostra, de forma sucinta, algumas especificações técnicas referentes, tão

Tabela I - Especificações Técnicas

Ordem Característica	1ª	2ª	
		Classe I	Classe II
Espaçamento recomendado entre duas estações adjacentes: raramente menores que (km)	15	10 ou conforme requerido	5
Medição de bases: - Erro médio quadrático	1:1000000	1:900000	1:800000
Direções horizontais: - Instrumento	0,2"	0,2"	1,0"
- Número de posições	16	16	12
- Maior afastamento da média da direção	4"	4"	5"
Fechamento dos triângul: - Médio	1,0"	1,2"	2,0"
- Máximo admissível num triângulo isolado	3,0"	3,0"	5,0"
Azimuthes astronômicos: - Espaçamento das figuras	6 a 8	6 a 10	8 a 10
- Nº de observ./noite	16	16	16
- Nº de noites	2	2	1
- Erro médio quadrático	0,45"	0,45"	0,6"

-samente, à 1ª e à 2ª ordens. Aos leitores que se interessarem por um estudo mais profundo sobre classificações, erros médios quadráticos e especificações gerais para redes de triangulação, sugere-se uma análise com maior acuidade na referência acima citada.

2.3 - Resolução de Triângulos Geodésicos

O triângulo geodésico é a figura geométrica obtida quando três pontos, sobre o elipsóide de revolução, determinarem igual número de geodésicas. Geodésicas são curvas reversas que representam a menor distância entre dois pontos sobre a superfície elipsóidica.

A resolução de um triângulo geodésico, por não haver uma trigonometria geodésica, parece que seria bastante laboriosa. Para minimizar tal problema, sem prejuízo significativo da exatidão dos resultados, são feitas algumas simplificações, abordadas nas seções seguintes, as quais permitirão, de forma menos complexa, calcular o comprimento dos lados, o excesso esférico e o erro de fechamento.

2.3.1 - Aceitação do Triângulo Esférico

Demonstra-se em geodésia que se pode substituir um triângulo elipsóidico por um esférico desde que, com o auxílio da latitude do centro de gravidade daquele, se calcule o raio da esfera com a expressão

$$R = \sqrt{MN} \quad (2.1),$$

em que M e N são, respectivamente, os raios de curvatura das seções meridiana e primeiro vertical do elipsóide considerado como modelo, os quais podem ser calculados com

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \quad (2.2)$$

e

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.3).$$

Substituindo-se na (2.1) os raios de curvatura das seções meridiana e primeiro vertical do elipsóide pelos valores expressos em (2.2) e (2.3) e fazendo-se as operações possíveis, chega-se a esta outra expressão

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2 \sin^2 \phi)} \quad (2.4),$$

na qual ϕ é a latitude média ou do centro de gravidade do triângulo elipsóidico e o parâmetro do radicando é a excentricidade primeira que pode ser calculada com o auxílio da expressão abaixo:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \quad (2.5).$$

A substituição do triângulo elipsóidico por um esférico, evidentemente, tem limitações e Gemael (1977, p.7.3-4)⁸ deduz a

expressão abaixo:

$$t - t' = \frac{e'^2 s^4 \sin 2\phi \sin \Delta A}{6N^3} \quad (2.6),$$

onde

t representa um arco de "circunferência geodésica" descrita por uma das extremidades da geodésica s quando sofre um deslocamento em azimute de ΔA ;

t' representa um arco de circunferência descrita por uma das extremidades da geodésica s quando sofre o mesmo deslocamento em azimute de ΔA numa esfera de mesmo raio R que o da extremidade fixa e

e' representa a excentricidade segunda e seu valor, podendo-se obter com o auxílio da expressão

$$e'^2 = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2} \quad (2.7).$$

Na expressão (2.6), para $\Delta A = 90^\circ$, o valor natural da função seno será a unidade e aquela poderá ser assim expressa:

$$t - t' = \frac{e'^2 s^4 \sin 2\phi}{6N^3} \quad (2.8),$$

com a qual, para diferentes latitudes e comprimentos de geodésicas, obtêm-se diferentes valores de $(t - t')$, expressos em milímetros na Tabela II que são os máximos.

Tabela II - Diferença que se obtém em mm quando se substitui uma geodésica por um arco de circunferência máxima.

$\phi_m(^{\circ})$ S(km)	10	20	30	40
25	$5,8 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^{-3}$	$1,5 \times 10^{-3}$	$1,7 \times 10^{-3}$
50	$9,3 \times 10^{-3}$	$1,7 \times 10^{-2}$	$2,3 \times 10^{-2}$	$2,7 \times 10^{-2}$
100	0,15	0,28	0,38	0,43
150	0,75	1,41	1,90	2,16
175	1,39	2,62	3,52	4,00
200	2,38	4,47	6,01	6,82

Com a análise da Tabela II e considerando que no Brasil as redes fundamentais muito raramente terão geodésicas superiores a 50 km e que a latitude brasileira varia de 34°S a 5°N , pode-se sem significativo prejuízo à ordem de grandeza dos resultados, substituir os triângulos, elipsóidicos por esféricos nas condições já especificadas.

2.3.2 - Cálculo do Excesso Esférico

Contorna-se, assim, o problema da resolução dos triângulos elipsóidicos. Mas os triângulos esféricos, da triangulação fundamental, têm lados normalmente inferiores a um terço de grau, o que implica em fortes variações das diferenças tabulares dos senos, provocando dificuldades computacionais e, seguindo a linha de pensamento de Gemael (1977, p. 7.2-9)⁸, o teorema de Legendre poderá contornar tais inconvenientes quando permitirá resolver os triângulos geodésicos como se fossem planos.

Seja, portanto, o triângulo esférico ABC com área S e o

plano $A'B'C'$ com S' e de lados homólogos do mesmo comprimento considerados na figura abaixo.

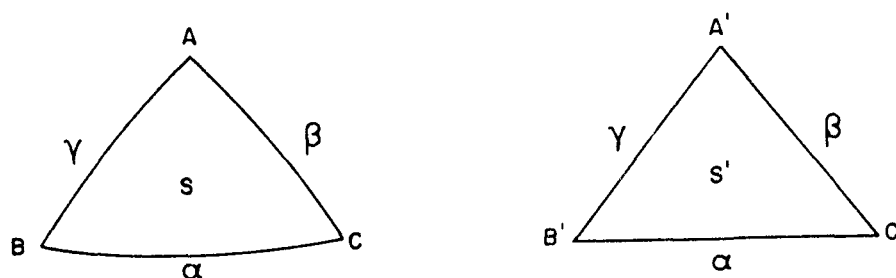


Fig. 3 - Triângulo Esférico e Plano

O teorema de Legendre demonstra que

$$S = S'$$

e

$$\left. \begin{aligned} A - A' &= \frac{\epsilon}{3} \\ B - B' &= \frac{\epsilon}{3} \\ C - C' &= \frac{\epsilon}{3} \end{aligned} \right\} \quad (2.9),$$

onde ϵ representa o excesso esférico, o qual pode ser calculado com a fórmula

$$\epsilon'' = \frac{\rho'' \beta \gamma \text{sen} A'}{2MN} \quad (2.10),$$

em que

$$\rho'' = \frac{1}{\text{sen } 1''} \quad (2.11).$$

Considerando as expressões (2.2), (2.3) e (2.11) e substituindo na (2.10) pelos seus valores respectivos, após a execução das operações possíveis, chega-se à expressão abaixo:

$$\epsilon'' = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^2 \beta \gamma \sin A'}{2a^2 (1 - e^2) \sin l''} \quad (2.12),$$

que pareceu mais prática ao programá-la para sua utilização em minicalculadoras eletrônicas de mesa.

2.3.3 - Cálculo do Comprimento dos Lados

Entretanto, tanto a fórmula (2.10) como a (2.12) têm os lados β e γ do triângulo plano, iguais ao comprimento dos lados homólogos do triângulo esférico, conforme já foi mencionado. A obtenção desses valores, β e γ , só é possível se for conhecido o comprimento do lado oposto ao ângulo A' , isto é, se faz necessário o conhecimento do lado α . E, com aplicação da analogia dos senos da trigonometria plana, conforme se pode visibilizar através das expressões seguintes

$$\beta = \frac{\alpha \sin B'}{\sin A'} \quad (2.13)$$

e

$$\gamma = \frac{\alpha \sin C'}{\sin A'} \quad (2.14),$$

torna-se possível, de uma forma simples, a obtenção dos valores dos comprimentos dos lados β e γ .

2.3.4 - Cálculo do Erro de Fechamento

Conforme se pode ver em Gemael (1978, p. 1.05)¹⁰, uma das propriedades dos triângulos esféricos está em a soma dos ângulos internos ser maior do que dois retos e menor do que seis.

Evidentemente, em qualquer triângulo esférico, tem-se

$$A + B + C - \epsilon - 180^0 = 0 \quad (2.15).$$

Mas, quando se trata de triangulação geodésica, em que os ângulos internos são todos medidos e, conseqüentemente, estão eivados dos inevitáveis erros acidentais, então tem-se que adaptar a teoria à realidade e a expressão abaixo

$$A + B + C - \epsilon - 180^0 = W \quad (2.16)$$

torna-se válida, onde W representa o erro de fechamento do triângulo esférico quando todos os ângulos internos foram observados e constata-se que, dificilmente, a condição (2.15) é verificada.

2.4 - Transporte de Coordenadas no Elipsóide

Considerando-se dois pontos A e B no elipsóide dos quais se conhece:

ϕ_A - latitude de A

λ_A - longitude de A

s - comprimento da geodésica AB e

α_{AB} - azimute da geodésica AB

e se pretende saber:

ϕ_B - latitude de B

λ_B - longitude de B e

α_{BA} - azimute da geodésica BA ou contra-azimute de AB.

Considerando-se, agora, o problema inverso, com respeito aos dois pontos A e B no elipsóide, dos quais se conhece:

ϕ_A - latitude de A

λ_A - longitude de A

ϕ_B - latitude de B e

λ_B - longitude de B

e se deseja encontrar os valores de:

s - comprimento da geodésica AB

α_{AB} - azimute da geodésica AB e

α_{BA} - azimute da geodésica BA.

A resolução dos dois problemas enunciados acima, denominados de problema direto e inverso da geodésia geométrica, respectivamente, é possível e muitas são as fórmulas que conduzem à solução; entretanto, vê-se, somente, as da latitude média de Gauss e as de Puissant.

2.4.1 - Fórmulas da Latitude Média de Gauss

Segundo Krakiwsky & Thomson (1974, p. 53-4)¹³, essas fórmulas foram publicadas pela primeira vez na Inglaterra em 1861. Ainda a mesma fonte informa que elas podem ser utilizadas para pontos que tenham geodésicas e módulos de latitude inferiores a 40km e a 80⁰, respectivamente. As fórmulas são:

$$d\phi = \frac{s \cos \alpha_m}{M_m} \quad (2.17)$$

$$\phi_B = \phi_A + d\phi \quad (2.18)$$

$$\phi_m = \frac{\phi_A + \phi_B}{2} \quad (2.19)$$

$$d\alpha = \frac{s \sin \alpha_m \operatorname{tg} \phi_m}{N_m} \quad (2.20)$$

$$\alpha_m = \alpha_{AB} + \frac{d\alpha}{2} \quad (2.21)$$

$$d\lambda = \frac{s \sin \alpha_m}{N_m \cos \phi_m} \quad (2.22)$$

$$\lambda_B = \lambda_A + d\lambda \quad (2.23)$$

e

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} + d\alpha \pm \pi. \quad (2.24)$$

Ao serem analisadas as expressões anteriores, constata-se, facilmente, que o valor de ϕ_B é obtido através de um processo iterativo, sendo que numa 1ª aproximação, com o auxílio da (2.18) e da (2.17), utiliza-se α_{AB} no lugar de α_m na (2.17) e na (2.20). Com o cálculo de $d\alpha$, alcança-se α_m com a (2.21). Então, volta-se a utilizar da (2.17) até a (2.21). Através de várias experiências realizadas, se pôde verificar que no quarto passo iterativo repetem-se os valores na ordem do 0,0001" para a latitude. Atingida a convergência desejada, pode-se, então, calcular λ_B e α_{BA} com o auxílio das (2.22) a (2.24).

Com o procedimento acima e com a utilização de uma minicalculadora eletrônica de mesa, programável, torna-se bem simples e rápido o cálculo das coordenadas geodésicas do ponto B e do contra-azimute da geodésica AB.

Quanto ao problema inverso, com a aplicação das fórmulas da latitude média de Gauss, o cálculo de s , α_{AB} e α_{BA} , é possível com pequenas transformações nas expressões (2.17) a (2.24). Assim, ϕ_m pode-se obter com a (2.19) e com o auxílio da (2.17) calcula-se α_m . A (2.20) dá $d\alpha$ e α_{AB} é possível obter-se com a (2.21) e, finalmente, α_{BA} com a (2.24). Neste procedimento não são necessários processos iterativos e, assim, o cálculo é ainda mais simples do que no problema direto.

Parece oportuno salientar que as expressões de (2.17) a (2.24) são válidas para coordenadas geodésicas expressas em radianos, para longitudes contadas positivamente a este do meridiano de Greenwich e para azimutes-horários com início da contagem no norte geográfico.

2.4.2 - Fórmulas de Puissant

De acordo com Krakiwsky & Thomsom (1974, p. 43-53)¹³, as fórmulas de Puissant, desenvolvidas pelo matemático francês do mesmo nome, são consideradas, geralmente, corretas com 1p.p.m. até 100km. Mais uma vez parece importante frisar que as mesmas, como são apresentadas, são válidas para coordenadas geodésicas expressas em radianos, para longitudes contadas positivamente a este do meridiano de Greenwich e para azimutes-horários com início da contagem no norte geográfico. As fórmulas são:

$$\Delta\phi = \frac{s}{N_A} \cos \alpha_{AB} - \frac{s^2}{2N_A^2} \operatorname{tg} \phi_A \operatorname{sen}^2 \alpha_{AB} -$$

$$- \frac{s^3}{6N_A^3} \cos \alpha_{AB} \operatorname{sen}^2 \alpha_{AB} (1+3\operatorname{tg}^2 \phi_A) + \dots \quad (2.25)$$

$$d\phi = \left(\frac{s}{M_A} \cos \alpha_{AB} - \frac{s^2}{2N_A^2} \operatorname{tg} \phi_A \operatorname{sen}^2 \alpha_{AB} - \right.$$

$$\left. - \frac{s^3}{6N_A^3} \cos \alpha_{AB} \operatorname{sen}^2 \alpha_{AB} (1+3\operatorname{tg}^2 \phi_A) + \dots \right).$$

$$\left(1 - \frac{3e^2 \operatorname{sen} \phi_A \cos \phi_A}{2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_A)} : \Delta\phi \right) \quad (2.26)$$

$$\phi_B = \phi_A + d\phi \quad (2.27)$$

$$d\lambda = \frac{s}{N_B} \sin \alpha_{AB} \sec \phi_B \left(1 - \frac{s^2}{6N_B^2} (1 - \sin^2 \alpha_{AB} \sec^2 \phi_B) \right) \quad (2.28)$$

$$\lambda_B = \lambda_A + d\lambda \quad (2.29)$$

$$d\alpha = 2 \arctg \frac{\sin \phi_m \operatorname{tg}(d\lambda/2)}{\cos(d\phi/2)} \quad (2.30)$$

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} + d\alpha \pm \pi \quad (2.31)$$

Analisando as fórmulas de Puissant, é fácil constatar-se que se deve calcular M_A e N_A com o auxílio das (2.2) e (2.3). Em seguida, com a ajuda da (2.25), calcula-se uma aproximação para $\Delta\phi$, que se utilizará, então, na (2.26). A latitude do ponto B será, assim, obtida com a utilização da (2.27). O cálculo da longitude pode, então, ser obtida com a (2.28) e (2.27) não esquecendo que se tem de calcular N_B com a (2.2). Com a (2.31) pode-se, então, calcular o azimuth da geodésica BA depois de se ter calculado $d\alpha$ com a (2.30).

Esse conjunto de fórmulas resolve o problema direto. Quanto ao inverso, pode ser solucionado com o auxílio das expressões seguintes:

$$x = d\lambda N_m \cos \phi_m \quad (2.32)$$

$$y = d\phi M_m \cos \left(\frac{d\lambda}{2} \right) \quad (2.33)$$

$$\alpha_m = \arctg \left(\frac{x}{y} \right) \quad (2.34)$$

$$\alpha_{AB} = \alpha_m - \frac{d\alpha}{2} \quad (2.35)$$

$$\alpha_{BA} = \alpha_m + \frac{d\alpha}{2} \pm \pi \quad (2.36)$$

e

$$s = \frac{y}{\cos \alpha_m} = \frac{x}{\sin \alpha_m} \quad (2.37).$$

Da análise dessas expressões, solucionadoras do problema inverso, conclui-se que, primeiramente, se deve obter ϕ_m com a (2.19). Então, com a (2.2) e a (2.3) pode-se calcular, respectivamente, N_m e M_m . Com a (2.27) e a (2.29) consegue-se os valores de $d\phi$ e $d\lambda$. Assim, se está em condições de calcular α_m com as (2.32) e (2.33) na (2.34). O azimuth da geodésica AB será, então, calculado com a (2.30) e a (2.35). A expressão (2.36) permite que se calcule o contra-azimuth da referida geodésica. Seu comprimento poderá ser obtido com a (2.37).

3 - AJUSTAMENTO DE TRIANGULAÇÕES GEODÉSICAS

3.1 - Introdução

Quando se dispõe de observações superabundantes, obtidas da mensuração de grandezas físicas, direta ou indiretamente, e deseja-se conhecer os valores mais prováveis e únicos, consegue-se isso através de um conjunto de operações, denominado de ajustamento, segundo certos critérios pré-estabelecidos.

Dependendo desses critérios, ter-se-ão processos diferentes para o ajustamento de triangulações geodésicas. O método, a ser utilizado ao longo deste trabalho, será o de variação de coordenadas. A utilização de tal método exige que, previamente, se calculem as coordenadas provisórias ou aproximadas, através de um transporte, com fórmulas simples, e os valores observados. Com as coordenadas aproximadas calculam-se, de forma rigorosa, as observações. Para cada valor observado ter-se-á uma equação de observação. O ajustamento dará as correções a inserir nas coordenadas aproximadas. Assim, com o presente método, obtêm-se as coordenadas ajustadas da triangulação. Com o auxílio da estatística, ainda, pode-se avaliar o grau de confiabilidade dos resultados, desde que seja conhecido ou avaliado o das observações. Parece oportuno salientar que a obtenção das correções requer a resolução de um sistema de equações normais que, para o efeito, se torna necessário conhecer o grau de singularidade para resolvê-lo:

- pela álgebra de Cayley ou
- pela aplicação de inversas generalizadas.

Os tópicos desenvolvidos ao longo deste capítulo permitirão alcançar os valores mais prováveis e únicos das coordenadas geodésicas dos vértices de triangulações, como também possibilitarão avaliar o seu grau de confiabilidade.

3.2 - Equações de Observação e/ou de Injunção

Nesta seção desenvolver-se-ão as equações de observação de ângulos e as equações de injunções de orientação, de posição e de escala. Parece oportuno esclarecer que as equações de observação e de injunção serão todas relacionadas com as coordenadas geodésicas, latitude e longitude, referidas ao elipsóide de referência.

3.2.1 - Equação de Distância

De acordo com Krakiwsky & Thomson (1978, p. 6)¹⁴, o modelo matemático para a distância geodésica, expressa como uma função de dois pares de coordenadas, é simbolicamente escrito como

$$F_{ij} = S(\phi_i, \lambda_i, \phi_j, \lambda_j) - S_{ij} = 0 \quad (3.1),$$

onde o primeiro termo do segundo membro é uma função não-linear das coordenadas e o outro termo é o valor da distância observada reduzida ao elipsóide.

Sendo F_{ij} uma função não-linear, pode-se linearizá-la através da série de Taylor. Desprezando-se os termos de ordem superior à primeira, obtêm-se:

$$F_{ij} = F_{ij}^0 + (dF_{ij})_0 \quad (3.2).$$

Da análise das (3.2) e (3.1) pode-se escrever a expressão abaixo:

$$S(\phi_i^0, \lambda_i^0, \phi_j^0, \lambda_j^0) - S_{ij} + ds(\phi_i^0, \lambda_i^0, \phi_j^0, \lambda_j^0) - V_{S_{ij}} = 0 \quad (3.3),$$

em que o primeiro termo representa a distância geodésica calculada a partir de coordenadas aproximadas. S_{ij} , como já se viu, é o valor da distância elipsóidica, reduzida da distância observada ou medida em campo. A terceira parcela representa o valor que a diferencial total da distância geodésica assume quando se substituem, no termo diferenciado, as variáveis pelos seus respectivos valores aproximados e $V_{S_{ij}}$ é o resíduo para a distância elipsóidica.

Segundo Krakiwsky & Thomsom (1978, p. 7)¹⁴, a diferencial total para a distância como função de coordenadas geodésicas já foi descrita, em 1880, por Helmert e em 1928 por Tobey, sendo as expressões as seguintes:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \phi_i} d\phi_i + \frac{\partial S}{\partial \lambda_i} d\lambda_i + \frac{\partial S}{\partial \phi_j} d\phi_j + \frac{\partial S}{\partial \lambda_j} d\lambda_j \quad (3.4),$$

onde

$$\frac{\partial S}{\partial \phi_i} = - M_i^0 \cos \alpha_{ij}^0 \quad (3.5),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} = - N_i^0 \sin \alpha_{ij}^0 \cos \phi_i^0 \quad (3.6),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \phi_j} = - M_j^0 \cos \alpha_{ji}^0 \quad (3.7),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_j} = - N_j^0 \sin \alpha_{ji}^0 \cos \phi_j^0 \quad (3.8),$$

em que N^0 e M^0 podem ser calculados com o auxílio das (2.2) e (2.3), respectivamente, e α^0 é o azimuth geodésico com a ajuda das expressões (2.32) a (2.36) para valores de coordenadas aproximadas.

Substituindo na (3.4) os valores conhecidos pelas expressões (3.5) e (3.8), levando o resultado na (3.3) e considerando

$$S_{ij}^0 = S(\phi_i^0, \lambda_i^0, \phi_j^0, \lambda_j^0) \quad (3.9),$$

obtem-se, então, a expressão abaixo:

$$\begin{aligned} V_{S_{ij}} = & - M_i^0 \cos \alpha_{ij}^0 d\phi_i - N_i^0 \sin \alpha_{ij}^0 \cos \phi_i^0 d\lambda_i - \\ & - M_j^0 \cos \alpha_{ji}^0 d\phi_j - N_j^0 \sin \alpha_{ji}^0 \cos \phi_j^0 d\lambda_j + \\ & + (S_{ij}^0 - S_{ij}) \end{aligned} \quad (3.10),$$

a qual se chamará de equação de observação para a distância elipsóidica.

Na expressão (3.10) sugere-se que todos os termos possuam a mesma unidade, de preferência o metro. Na referida expressão, constata-se que $d\phi_i$, $d\lambda_i$, $d\phi_j$ e $d\lambda_j$ são as variáveis

que se desconhece e se deseja calcular. São as correções a inserir nas coordenadas aproximadas. Os coeficientes dessas variáveis são facilmente calculados com o auxílio das coordenadas arbitradas.

3.2.2 - Equação de Injunção de Azimute Geodésico

O modelo matemático para o azimute geodésico, conforme Krakiwsky & Thomsom (1978, p. 15)¹⁴, pode ser representado simbolicamente como

$$F_{ij} = \alpha(\phi_i, \lambda_i, \phi_j, \lambda_j) - \alpha_{ij} = 0 \quad (3.11),$$

onde o primeiro termo do segundo membro é o azimute como função não-linear das coordenadas de dois pontos i e j e o segundo termo é o valor do azimute geodésico. O modelo acima pode ser linearizado pela série de Taylor e, desprezando os termos de ordem superior à primeira, obtêm-se uma expressão idêntica à (3.2).

Da análise da (3.2) e (3.11) pode-se escrever a expressão abaixo:

$$\alpha_{ij}(\phi_i^0, \lambda_i^0, \phi_j^0, \lambda_j^0) - \alpha_{ij} + d\alpha_{ij} - v_{\alpha_{ij}} = 0 \quad (3.12),$$

em que o primeiro termo é o valor do azimute calculado com o auxílio do problema inverso da latitude média de Gauss ou de Puissant, utilizando-se as coordenadas aproximadas. O termo seguinte, α_{ij} , é o valor do azimute geodésico calculado com o auxílio das coordenadas conhecidas dos pontos i e j. O terceiro termo, $d\alpha_{ij}$, representa o valor que a diferencial total assume quando

substituídas, na função diferenciada, as variáveis pelos seus respectivos valores aproximados, sendo $V_{\alpha_{ij}}$ o resíduo para o azimuth.

A diferencial total para o azimuth α_{ij} como função das coordenadas de dois pontos i e j pode ser matematicamente expressa do seguinte modo:

$$d\alpha_{ij} = \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \phi_i} d\phi_i + \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \lambda_i} d\lambda_i + \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \phi_j} d\phi_j + \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \lambda_j} d\lambda_j \quad (3.13),$$

em que

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \phi_i} = \frac{M_i^0 \operatorname{sen} \alpha_{ij}^0}{S_{ij}^0}, \quad (3.14),$$

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \lambda_i} = - \frac{N_i^0 \cos \alpha_{ij}^0 \cdot \cos \phi_i^0}{S_{ij}^0} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \phi_j} = \frac{M_j^0 \operatorname{sen} \alpha_{ji}^0}{S_{ij}^0} \quad (3.16)$$

e

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \lambda_j} = - \frac{N_j^0 \cos \alpha_{ji}^0 \cdot \cos \phi_j^0}{S_{ij}^0} \quad (3.17).$$

Substituindo na (3.13) os valores apresentados nas quatro expressões acima, levando o resultado na (3.12) e não esquecendo que

$$\alpha_{ij}^0 = \alpha_{ij}(\phi_i^0, \lambda_i^0, \phi_j^0, \lambda_j^0) \quad (3.18),$$

obtem-se, então, a expressão seguinte:

$$\begin{aligned} V_{\alpha_{ij}} = & \frac{M_i^0 \operatorname{sen} \alpha_{ij}^0}{S_{ij}^0} d\phi_i - \frac{N_i^0 \cos \alpha_{ij}^0 \cos \phi_i^0}{S_{ij}^0} d\lambda_i + \\ & + \frac{M_j^0 \operatorname{sen} \alpha_{ji}^0}{S_{ij}^0} d\phi_j - \frac{N_j^0 \cos \alpha_{ji}^0 \cos \phi_j^0}{S_{ij}^0} d\lambda_j + \\ & + \alpha_{ij}^0 - \alpha_{ij} \end{aligned} \quad (3.19),$$

a qual será chamada de equação de injunção de azimuth geodésico e que, para deduções futuras, será simplificada para

$$V_{\alpha_{ij}} = a_{ij} d\phi_i + b_{ij} d\lambda_i + a_{ji} d\phi_j + b_{ji} d\lambda_j + \alpha_{ij}^0 - \alpha_{ij} \quad (3.20),$$

cujos coeficientes a_{ij} , b_{ij} , a_{ji} e b_{ji} são idênticos aos segundos membros da (3.14) a (3.17), respectivamente.

Observando a expressão (3.19), parece oportuno sugerir que todos os termos deverão ter como unidade de dimensão o radiano. Continuando a observação, constata-se que $d\phi_i$, $d\lambda_i$, $d\phi_j$

e $d\lambda_j$ são as variáveis desconhecidas e que se deseja calcular. Os coeficientes dessas variáveis são facilmente calculados com o auxílio de coordenadas aproximadas.

3.2.3 - Equação de Injunção de Azimute de Laplace

O modelo matemático para o azimute de Laplace pode ser representado, simbolicamente, como

$$F_{ij} = \alpha(\phi_i, \lambda_i, \phi_j, \lambda_j) - \alpha_{ij}^{\ell} = 0 \quad (3.21),$$

onde o primeiro termo do segundo membro é uma função não-linear das coordenadas e o outro termo é o valor do azimute de Laplace calculado, conforme Gemael (1976, p. 12)⁷, com a seguinte expressão:

$$\alpha_{ij}^{\ell} = \alpha_{ij}^a + (\lambda_i - \lambda_i^a) \operatorname{sen} \phi_i \quad (3.22),$$

em que o índice a denota valores astronômicos.

Considerando que no cálculo do azimute de Laplace entra o valor da longitude geodésica aproximada, pois a mesma ainda não foi ajustada, então λ_i deverá ser tratada como variável. Assim, o modelo, definido pela (3.21), ao ser linearizado pela série de Taylor e ao desprezar os termos de ordem superior à primeira, deverá, em consideração ao acima exposto, tratar α_{ij}^{ℓ} como uma variável. Dessa forma, com a linearização, obtêm-se

$$\alpha_{ij}(\phi_i^0, \lambda_i^0, \phi_j^0, \lambda_j^0) + d\alpha_{ij} - \alpha_{ij}^{\ell} - d\alpha_{ij}^{\ell} - V_{\alpha_{ij}} = 0 \quad (3.23).$$

Entretanto,

$$d\alpha_{ij}^{\ell} = \text{sen}\phi_i d\lambda_i + (\lambda_i - \lambda^a) \cos\phi_i d\phi_i \quad (3.24)$$

e como os termos de ordem superior à primeira devem ser desprezados, a (3.24) tomará a seguinte forma

$$d\alpha_{ij}^{\ell} = \text{sen}\phi_i d\lambda_i \quad (3.25).$$

Considerando as expressões (3.13) a (3.20) e a (3.25) e levando seus valores na (3.23), obtêm-se

$$\begin{aligned} v_{\alpha_{ij}} = & a_{ij} d\phi_i + (b_{ij} - \text{sen}\phi_i) d\lambda_i + a_{ji} d\phi_j + \\ & + b_{ji} d\lambda_j + \alpha_{ij}^0 - \alpha_{ij}^{\ell} \end{aligned} \quad (3.26),$$

que, representa a equação de injunção de orientação para azimuth de Laplace.

3.2.4 - Equação de Observação de Ângulo

Sejam i , j e k os vértices intervisíveis de uma triangulação, representados na Fig. 4 ao lado. Conforme se pode ver, os três vértices definem o ângulo β . Entretanto, o referido ângulo pode ser obtido da diferença de dois azimutes e, assim, expressar-se da forma seguinte:

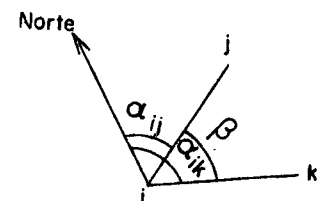


Fig. 4 - Ângulo

$$\beta_{jik} = \alpha_{ik} - \alpha_{ij} \quad (3.27)$$

As equações de observação dos dois azimutes da (3.27), de acordo com a (3.20), podem, simbolicamente, ser representadas da forma seguinte:

$$V_{\alpha_{ik}} = a_{ik} d\phi_i + b_{ik} d\lambda_i + a_{ki} d\phi_k + b_{ki} d\lambda_k + \alpha_{ik}^0 - \alpha_{ik} \quad (3.28),$$

$$V_{\alpha_{ij}} = a_{ij} d\phi_i + b_{ij} d\lambda_i + a_{ji} d\phi_j + b_{ji} d\lambda_j + \alpha_{ij}^0 - \alpha_{ij} \quad (3.29),$$

que, de acordo com a (3.27) e efetuando a subtração da expressão (3.28) pela (3.29), membro a membro, obtêm-se a seguinte:

$$\begin{aligned} V_{\beta_{jik}} = & (a_{ik} - a_{ij}) d\phi_i + (b_{ik} - b_{ij}) d\lambda_i + \\ & + a_{ki} d\phi_k + b_{ki} d\lambda_k - a_{ji} d\phi_j - \\ & - b_{ji} d\lambda_j + \beta_{jik}^0 - \beta_{jik} \end{aligned} \quad (3.30),$$

representando a equação de observação do ângulo atrás definido.

3.2.5 - Equação de Injunção de Coordenadas

De forma análoga ao que foi visto nas seções anteriores, pode-se estabelecer o modelo matemático para os vértices cujas coordenadas já são conhecidas. Assim, para cada par de coordenadas de um ponto i , ter-se-ã as seguintes expressões:

$$F_i = \phi_i(\phi_j, \lambda_j) - \phi_i = 0 \quad (3.31)$$

e

$$F_i = \lambda_i(\phi_j, \lambda_j) - \lambda_i = 0 \quad (3.32),$$

onde os primeiros termos dos segundos membros são uma função não-linear das coordenadas e os outros termos são os valores das coordenadas geodésicas do ponto i . O modelo acima pode ser linearizado pela série de Taylor, quando, desprezando os termos de ordem superior à primeira, obtêm-se uma expressão idêntica à (3.2).

Da análise da (3.2) com as (3.31) e (3.32) pode-se escrever as expressões abaixo:

$$\phi_i(\phi_j^0, \lambda_j^0) - \phi_i + d\phi_i - V_{\phi_i} = 0 \quad (3.33)$$

e

$$\lambda_i(\phi_j^0, \lambda_j^0) - \lambda_i + d\lambda_i - V_{\lambda_i} = 0 \quad (3.34),$$

em que o primeiro termo da (3.33) e (3.34) é a latitude e a longitude calculadas a partir das coordenadas aproximadas de vértice vizinho ao do ponto i , com o auxílio das fórmulas de Puissant. Os termos subtrativos ϕ_i e λ_i representam os valores da latitude e da longitude conhecidos de outros ajustamentos. Os terceiros termos, $d\phi_i$ e $d\lambda_i$, representam as incógnitas e V_{ϕ_i} e V_{λ_i} são os resíduos para a latitude e a longitude, respectivamente.

Considerando que

$$\phi_i^0 = \phi_i(\phi_j^0, \lambda_j^0) \quad (3.35)$$

e

$$\lambda_i^0 = \lambda_i(\phi_j^0, \lambda_j^0) \quad (3.36)$$

então as expressões (3.33) e (3.34) podem ser escritas da forma seguinte:

$$V_{\phi_i} = d\phi_i + \phi_i^0 - \phi_i \quad (3.37)$$

e

$$V_{\lambda_i} = d\lambda_i + \lambda_i^0 - \lambda_i \quad (3.38)$$

que representam as equações de observação do par de coordenadas conhecidas do ponto i.

3.3 - Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados

Quando se dispõe de observações e dados de redes de triangulação, verifica-se que esses, basicamente, se compõem de:

- a) ângulos,
- b) distâncias,
- c) azimutes de Laplace e
- d) pares de coordenadas de v̄rtices j̄a definidos.

A cada um desses grupos corresponde um tipo de equação de observação ou de injunção, conforme se viu na seção 3.2. Desta forma, as redes de triangulação que tenham

p ângulos,

q distâncias,

r azimutes de Laplace e

t pares de coordenadas de v̄rtices j̄ definidos,

terão n equações obtidas de

$$p + q + r + t = n \quad (3.39).$$

A finalidade principal no ajustamento das redes de triangulação est̄ na obtenção das coordenadas de seus v̄rtices. Assim, uma rede com m v̄rtices ter̄ u coordenadas obtidas com o auxílio da expressão a seguir:

$$u = 2m \quad (3.40).$$

Na análise das equações de observação e de injunção, verifica-se que para um v̄rtice gen̄rico i aparecem como inc̄gnitas

$$d\phi_i \text{ e } d\lambda_i,$$

que s̄o as correções ou variações de coordenadas a introduzir nas coordenadas aproximadas. Assim, para o mesmo v̄rtice i , o valor das coordenadas ajustadas ser̄

$$\phi_i^a = \phi_i^o + d\phi_i \quad (3.41)$$

e

$$\lambda_i^a = \lambda_i^0 + d\lambda_i \quad (3.42).$$

Generalizando, para todos os v rtices da triangulação, pode-se, com o auxílio do cálculo matricial, representar, simbolicamente, através de uma única expressão, o que está representado nas (3.41) e (3.42). Dessa forma, ter-se- 

$${}_uX_1^a = {}_uX_1^0 + {}_uX_1 \quad (3.43),$$

onde

${}_uX_1^a$ é um vetor coluna com u elementos representando as coordenadas ajustadas dos m v rtices da triangulação,

${}_uX_1^0$ é um vetor coluna com u elementos representando as coordenadas aproximadas dos m v rtices da triangulação e

${}_uX_1$ é um vetor coluna com u elementos representando as correções ou variações de coordenadas dos m v rtices da triangulação.

Com as n equações de observação e de injunção a u incógnitas da rede de triangulação, pode-se, mais uma vez, com a ajuda do cálculo matricial, representá-las, simbolicamente, através de uma única expressão, cuja forma  :

$${}_nV_1 = {}_nA_u {}_uX_1 + {}_nL_1^C - {}_nL_1^0 \quad (3.44),$$

onde

\mathbf{V}_1^n é um vetor coluna com n elementos representando todos os resíduos das equações de observação;

\mathbf{A}_u^n é uma matriz de ordem $n \times u$, cujos elementos representam os coeficientes das incógnitas das equações de observação e de injunção;

\mathbf{L}_1^C é um vetor com n elementos representando as observações calculadas a partir das coordenadas aproximadas e

\mathbf{L}_1^O é um vetor com n elementos representando as observações de campo e os valores ajustados e/ou calculados das injunções.

Considerando, agora, a diferença da expressão matricial (3.44) da forma seguinte:

$$\mathbf{L}_1^C - \mathbf{L}_1^O = - \mathbf{L}_1^n \quad (3.45),$$

da qual, substituindo na (3.44), obtêm-se, de imediato, esta outra expressão matricial, conforme se pode constatar a seguir

$$\mathbf{V}_1^n = \mathbf{A}_u^n \mathbf{X}_1 - \mathbf{L}_1^n \quad (3.46).$$

Quando o número de equações de observação e de injunções for maior que o número de incógnitas ($n > u$), pode-se aplicar o método dos mínimos quadrados, o que, simbolicamente em notação matricial, se costuma representar por

$$\mathbf{V}_1^T \mathbf{P} \mathbf{V}_1 = \text{mínimo} \quad (3.47),$$

onde

V^T é o vetor de ordem $1 \times n$ e transposto do vetor V e

P é uma matriz quadrada simétrica de ordem $n \times n$ e representa a matriz dos pesos, abordada na seção 3.5.3.

Para a expressão (3.47) se verificar, denomine-se a forma quadrática $V^T P V$ de Φ e substituindo-a pelos valores da relação (3.46) tem-se

$$\Phi = (AX - L)^T P (AX - L) ,$$

$$\Phi = (X^T A^T - L^T) P (AX - L)$$

e

$$\Phi = X^T A^T P A X - X^T A^T P L - L^T P A X + L^T P L \quad (3.48),$$

sucessivamente. Entretanto, como a transposta de um escalar é igual ao escalar, pode-se escrever a igualdade matricial seguinte:

$$L^T P A X = X^T A^T P L \quad (3.49).$$

Assim, a (3.48) pode, agora, de acordo com a (3.49) e fazendo as operações possíveis, assumir a forma

$$\Phi = X^T A^T P A X - 2X^T A^T P L + L^T P L \quad (3.50).$$

Agora, então, pode-se minimizar a função Φ com respeito a X , o que é possível quando se iguala todas as derivadas parciais a zero, conforme segue

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, u \quad (3.51).$$

Portanto

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 2\hat{X}^T A^T P A - 2L^T P A = 0 \quad (3.52)$$

e, conseqüentemente,

$$\hat{X}^T A^T P A = L^T P A$$

que, transpondo ambos os membros, obtêm-se a expressão a seguir apresentada:

$$A^T P A \hat{X} = A^T P L \quad (3.53).$$

A expressão matricial (3.53) representa um sistema de u equações lineares a u incógnitas, chamada de sistema de equações normais, que se pode escrever, simbolicamente, de forma abreviada

$$N \hat{X} = U \quad (3.54),$$

onde

$N = A^T P A$ representa a matriz dos coeficientes das equações normais;

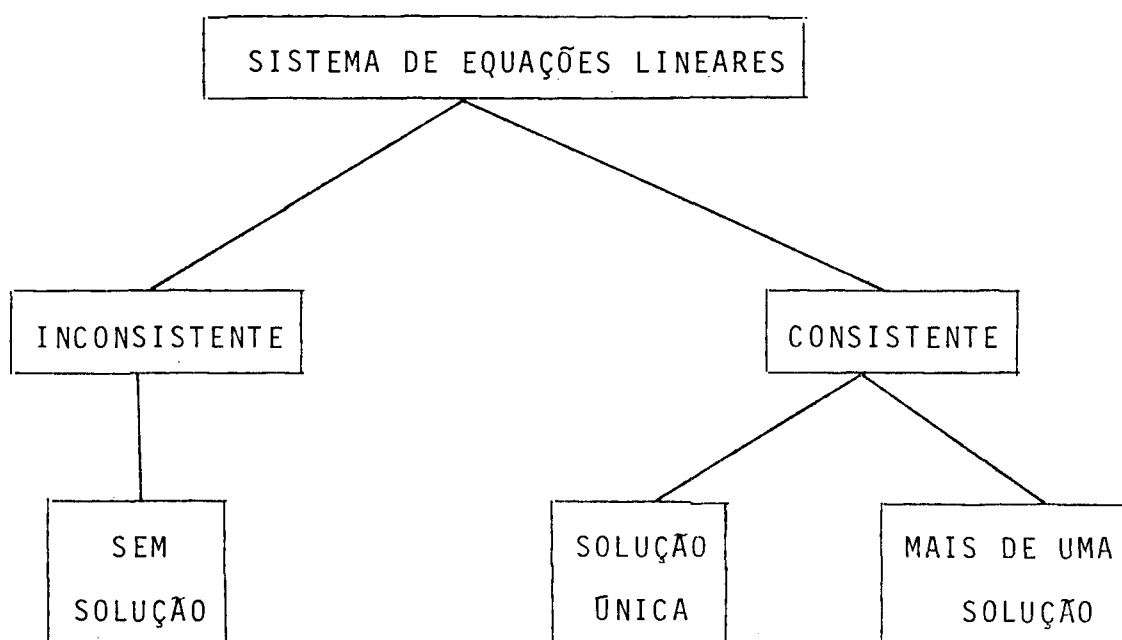
\hat{X} é um vetor coluna com u elementos, representando as estima-

tivas da solução do sistema e

$U = A^T P L$ é o vetor coluna com u elementos que representa os termos absolutos das equações normais.

3.4 - Resolução do Sistema de Equações Normais

Lipschutz (1977, p. 25)¹⁵ quando desenvolve a teoria sobre a resolução de sistema de equações lineares pela álgebra de Cayley, apresenta de forma bastante clara o seguinte diagrama.



Seja, em notação matricial, o seguinte sistema de equações lineares

$$n^A_u \, u^X_l = n^L_l \quad ,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2u} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nu} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

com A sendo chamada de matriz dos coeficientes, X é o vetor das incógnitas e L é o vetor das constantes.

O sistema será incompatível (inconsistente) sempre que a característica da matriz aumentada

$$(A \begin{smallmatrix} \vdots \\ L \end{smallmatrix})$$

for diferente da característica da matriz A. Neste caso, não há solução para o sistema, pela álgebra de Cayley, de acordo com Wells (1971, p. 18)²¹.

A aplicação do método dos mínimos quadrados a sistemas de equações superabundantes incompatíveis conduz a sistemas compatíveis (consistentes) de solução única ou de infinitas soluções.

A literatura especializada denomina a expressão (3.54) de sistema de equações normais. Será que elas serão merecedoras desse nome quando conduzem a infinitas soluções?

3.4.1 - Característica e Grau de Singularidade

Dada a matriz A de ordem $n \times u$, diz-se que r é a característica de A quando existir a matriz B , de ordem $r \times r$, formada com os elementos de A , pela eliminação de colunas, de linhas ou de ambas, em que r é a maior dimensão possível de ser formada, cujo determinante não seja nulo. Quando $n=u=r$, então A é uma matriz quadrada e não singular e, nesse caso, a matriz B se confunde com A .

No ajustamento de redes de triangulação pelo método de variação de coordenadas, em que condições a matriz dos coeficientes das equações normais é não-singular? De acordo com Gemael (1977, p. 27-8)⁹, a matriz N será sempre não singular desde que sejam fixadas as injunções iniciais que são a saber, as seguintes:

- a) uma distância para dar escala à triangulação;
- b) um azimuth para impedir rotações do sistema que alterariam as coordenadas de todos os vértices e
- c) as coordenadas de um dos vértices para impedir translações que produziriam efeitos análogos aos das rotações.

Assim, no ajustamento de redes de triangulação desprovidas de todas as injunções iniciais, reduziria a característica da matriz N em quatro graus de singularidade, sendo um para a distância, um para o azimuth e um para cada coordenada do par que define a posição do vértice. Dessa forma, a expressão a seguir

$$K = n - r \quad (3.55),$$

sendo r a característica de uma matriz, n a sua ordem e k o grau de singularidade, isto é, representa o número de equações de injunção necessárias para tornar N não singular.

Apenas a título de complementação, apresenta-se, na Tabela III, o grau de singularidade da matriz N para redes de triangulação geodésica quando se considera no todo ou em parte as injunções iniciais.

TABELA III

Grau de singularidade para redes de triangulação geodésicas

INJUNÇÃO INICIAL				GRAU DE SINGULARID.
DISTÂNCIA	AZIMUTE	COORD./ VERT.	TOTAIS	
0	0	0	Zero	Quatro
1	0	0	Uma	Três
0	1	0	Uma	Três
0	0	2	Duas	Dois
1	1	0	Duas	Dois
1	0	2	Três	Um
0	1	2	Três	Um
1	1	2	Quatro	Zero
0	0	4	Quatro	Zero

Com a análise da Tabela III, parece oportuno salientar que a fixação das coordenadas de dois vértices no ajustamento planimétrico

de redes de triangulação, como injunções iniciais, implicitamente, definem a escala e impedem rotações, visto que, como se sabe, com as coordenadas de dois v̄rtices   possível obter a distância e o azimute. Por outro lado, a Tabela III poderia ter mais linhas e, assim, continuar indefinidamente, desde que, se fosse aumentando, cada vez mais, as injunções iniciais que o grau de singularidade manter-se-ia sempre no zero, sempre que implícita ou explicitamente ficassem definidos, ao menos, uma distância, um azimute e um par de coordenadas.

3.4.2 - Equações Normais de Solução  nica

Considere-se a expressão matricial (3.54), sobre a qual, ainda, não se disse como resolvê-la. Entretanto, do que foi visto, pode-se, agora, afirmar que quando a matriz, N , dos coeficientes das equações normais tiver grau de singularidade zero, então as suas característica e ordem serão iguais e, assim, as equações normais ter o solução única.

A forma como resolver o sistema, entretanto, dependerá de muitos fatores, tais como dimensões da matriz N , forma como estão dispostos seus elementos, programas computacionais de que se dispõe, capacidade do computador a ser utilizado, custos pela sua utilização, etc. Evidentemente, esse não é o objetivo desta Dissertação; entretanto, pode-se informar que, na resolução de um sistema de equações, se deve optar por um dos métodos a seguir citados:

- a) diretos ou

b) iterativos.

Quanto aos diretos, costuma-se considerar os de Gauss, Banachiewicz, Choleski e Cracoviano, sendo o primeiro através da eliminação das incógnitas por substituição, enquanto que os restantes seguem o processo da decomposição triangular, conforme se pode ver, pormenorizadamente, em Gemael (1976)⁷. Na mesma fonte são, também, abordados os métodos iterativos, tais como os de Jacobi, de Gauss-Seidel e de Gradientes Conjugados. De igual forma em Wandressen (1980)²⁰ podem ser vistos esses métodos com pormenores. Por outro lado, em Modro (1980)¹⁷ encontram-se quatorze programas computacionais que possibilitam a inversão de matrizes não-singulares por métodos diferentes consoante a disposição dos elementos nas mesmas e, assim, a solução da (3.54) simbolicamente poderá ter uma solução expressa da forma seguinte:

$$\hat{X} = N^{-1} U \quad (3.56),$$

a qual será utilizada, ao longo desta Dissertação, quando se de^u sejar expressar a inversão de matrizes pela álgebra de Cayley.

3.4.3 - Equações Normais de Infinitas Soluções

De acordo com Rao (1971, p. 24)¹⁸, quando se dispõe de sistemas de equações lineares consistentes, elas podem ser resolvidas com a ajuda da expressão matricial seguinte:

$$X = N^g U + (I - N^g N) Z \quad (3.57),$$

onde I representa a matriz identidade, o índice g na matriz das equações normais representa a inversa generalizada e Z é um vetor coluna arbitrário. Assim, para cada valor que se arbitre a Z , obtêm-se uma solução diferente para o vetor X .

3.4.4 - Escolha de uma entre Infinitas Soluções

As infinitas soluções criadas pela existência de uma simétrica e singular matriz, que é a dos coeficientes das equações normais existente, em certas situações, na expressão matricial (3.54) podem ser inconvenientes ao geodesta. Desta forma, para contornar tal situação, alguns autores escolhem, dentre tantas soluções, aquela que apresente norma mínima. Entre esses autores está Boullion (1971, p. 50)¹, onde a solução que engloba mínimos quadrados de norma euclidiana mínima é dada pela expressão abaixo

$$\hat{X} = N^+ U \quad (3.58),$$

onde N^+ representa a pseudo-inversa da matriz dos coeficientes das equações normais e \hat{X} tem norma euclidiana mínima, sendo que se pode expressar tal condição, simbolicamente, como segue

$$\|\hat{X}\| = + \sqrt{\hat{X}^T \hat{X}} = \text{mín.} \quad (3.59)$$

Seguindo a linha de pensamento de Boullion (1971, p. 41)¹, restringindo a definição por ele apresentada ao tema desta Dissertação, pode-se dizer que o vetor X_0 é a melhor solução aproximada da expressão

$$NX = U$$

se, para todo X , uma das duas situações ocorrer:

- a) $\|NX - U\| > \|NX_0 - U\|$ ou
- b) $\|NX - U\| = \|NX_0 - U\|$ e $\|X\| \geq \|X_0\|$.

A mesma fonte demonstra que a pseudo-inversa é única e, portanto, o resultado que segue a condição (3.59) será único também. Em outro teorema, mostra que a melhor solução aproximada \hat{X} da expressão (3.54) é a que se obtém quando se utiliza a (3.58).

No item anterior e também neste, aborda-se sobre inversas generalizadas e pseudo-inversas, respectivamente. A matéria, estritamente matemática, mas, de grande aplicação para o geodesta, é digna de estudos profundos e, entre outras obras, sugere-se a consulta em Boullion (1971)¹, Gemael (1977)⁹, Modro (1980)¹⁷ e Rao (1971)¹⁸ que abordam o mesmo assunto sob diversos aspectos.

3.5 - Aleatoriedade dos Resultados

No ajustamento de redes de triangulação geodésica pode-se considerar dois tipos de modelos, a saber:

- a) o funcional e
- b) o aleatório.

Quanto ao modelo funcional, já se viu a sua forma com o estabelecimento das equações de observação, as quais mostram as

observações ajustadas como função das incógnitas ou parâmetros ajustados que, simbolicamente, se representa por

$$L_a = F(X_a) \quad (3.60).$$

Quanto ao modelo aleatório, por exemplo, Mikhail (1976)¹⁶ define-o como sendo a totalidade de suposições de propriedades estatísticas das variáveis envolvidas. Assim, pode-se estatisticamente analisar os resultados do ajustamento quando se utiliza o modelo aleatório de forma não-tendenciosa e, então, aceitar ou melhorar:

- a) o modelo matemático,
- b) as observações grosseiras e
- c) a compatibilidade das variâncias das observações com a precisão requerida nos resultados.

3.5.1 - Exatidão e Precisão

Quando se dispõe de valores médios observados, pode-se, à luz da teoria estatística, fazer inferências e dizer quão boas são as estimativas.

De acordo com El-Hakim (1979)³, a exatidão de uma medida deve ser considerada como um indicador digno de confiança, mostrando como os valores mais prováveis obtidos estão próximos dos verdadeiros que se desconhece.

Por outro lado, de acordo com a mesma fonte, a precisão é somente relativa e dá apenas a informação de quão próximas as observações estão do valor mais provável, mas, em termos absolu

tos, não se tem a noção da proximidade do valor verdadeiro com o mais provável.

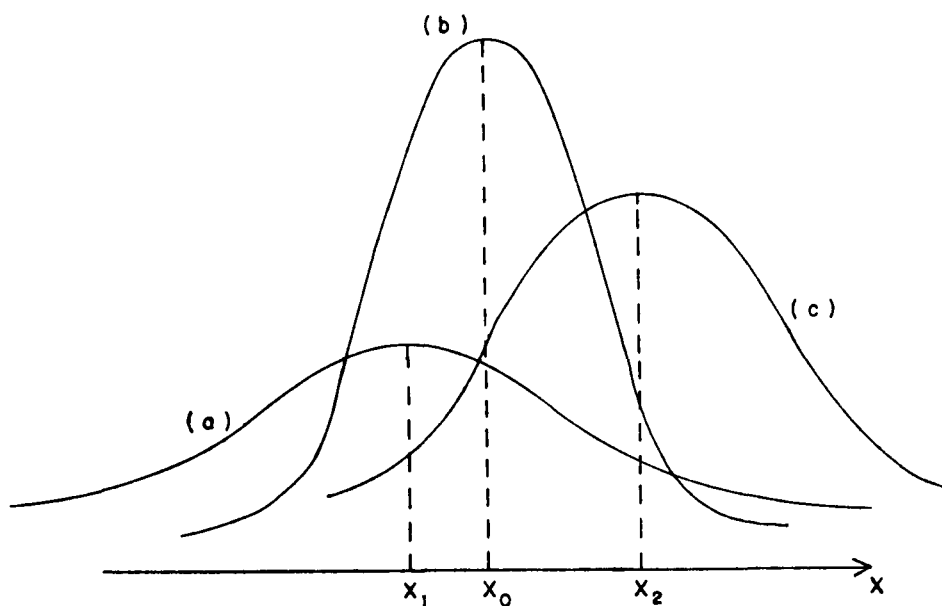


Fig. 5 - Representação de Estimativas

Na figura 5 estão representadas três curvas, cada uma representando o conjunto de mensurações executadas para a obtenção da estimativa ou do valor mais provável da mesma dimensão física. De imediato, pode-se afirmar que, para cada curva, as mensurações têm média e desvio padrão:

- $x_1, \sigma_1,$

- $x_0, \sigma_0,$

- $x_2, \sigma_2,$

respectivamente, para as curvas (a), (b) e (c).

Da análise da figura constata-se as duas relações seguin

tes:

$$x_1 < x_0 < x_2 \quad e$$

$$\sigma_0 < \sigma_2 < \sigma_1 \quad ,$$

permitindo, quanto à segunda, verificar que as medidas geradoras da curva (b) são as mais precisas, visto que σ_0 é o menor nas três curvas, enquanto que, sendo σ_1 o maior desvio padrão das três medidas, informa que a estimativa x_1 é a menos precisa.

De forma empírica, conduz-se, corretamente, ao acima exposto. Entretanto, deve-se ter o máximo de cuidado, pois preciso não é sinônimo de exato. Admita-se, por exemplo, que o verdadeiro valor é o x_0 . Então, constata-se que as medições menos precisas, na curva (a), são as da estimativa x_2 mais próxima do valor real, enquanto que a curva (c), com a estimativa x_2 mais precisa que a x_1 , está mais afastada do verdadeiro valor. Tal fato pode ocorrer quando as medições estão inseridas de erros sistemáticos, os quais devem ser eliminados sempre que se for fazer um ajustamento.

Face ao acima exposto e à luz da teoria estatística, pode-se dizer que, existindo apenas erros acidentais nas observações, então a exatidão e a precisão estarão numa relação dentro de certos limites. Por exemplo, para um nível de confiança a 95%, a exatidão não excederá em 1,96 vezes o erro médio quadrático da estimativa, supondo, evidentemente, que as medidas são normalmente distribuídas. Assim, como se fez ao nível de 95%, pode-se fazer a outros níveis menores ou maiores, consoante se de-seje estabelecer critérios mais ou menos rigorosos.

3.5.2 - Matriz Variância-Covariância

Dã-se o nome de matriz variância-covariância à matriz quadrada e simétrica, de ordem n , que tem na sua diagonal principal e nas outras posições as variâncias e covariâncias, respectivamente, de uma variável aleatória x n -dimensional. Designando-a de Σ_x , pode-se representá-la conforme segue:

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \quad (3.61),$$

onde σ_{ii}^2 representa a variância genérica da i -ésima variável aleatória e σ_{ij} é a covariância genérica das i e j -ésimas variável aleatória.

3.5.3 - Matriz dos Pesos

De acordo com Mikhail (1976)¹⁶, a matriz dos pesos pode-se obter com o auxílio da expressão seguinte

$$P = \sigma_0^2 \Sigma^{-1} \quad (3.62),$$

onde σ_0^2 é uma constante arbitrária sem dimensão física chamada de variância de referência ou da unidade de peso a priori, P representa a matriz dos pesos da variável aleatória x n -dimensional que tem Σ como matriz variância-covariância e o índice -1 ,

quer dizer que se trata da inversa da matriz supondo-a quadrada com elementos significativos em sua diagonal e não singular.

3.5.4 - Lei da Propagação Variância-Covariância

Conforme pode ser visto em Gemael (1974, p. 7)⁶, no que diz respeito à lei de propagação variância-covariância, demonstra-se que

$$\Sigma_y = G \Sigma_x G^T \quad (3.63)$$

e

$$\Sigma_y = D \Sigma_x D^T \quad (3.64)$$

sempre que existir, respectivamente, uma relação linear e outra não-linear entre as variáveis aleatórias x e y n e m -dimensionais definida por

$$y = GX + C \quad (3.65)$$

e

$$y = F(X) \quad (3.66),$$

onde

Σ_x representa a matriz variância-covariância da variável x , em princípio conhecida,

Σ_y representa a matriz variância-covariância da variável y , em princípio desconhecida,

- G é a matriz de ordem $m \times n$ formada pelos coeficientes, respectivos, das variáveis x da relação linear definida pela expressão matricial (3.65),
- C é o vetor coluna n -dimensional formado pelas constantes da relação linear definida pela expressão matricial (3.65) e
- D é a matriz de ordem $m \times n$ formada pelas derivadas parciais nos pontos em que X assume o valor de X_0 o que pode-se representar por

$$D = \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_0$$

3.5.5 - Matriz Variância-Covariância dos Parâmetros Ajustados

A expressão matricial (3.43), escrita a seguir,

$$X^a = X^0 + X$$

e considerando a (3.56) e a (3.45) com as considerações da expressão (3.54), pode-se reescrever a expressão acima, feitas as operações possíveis, da forma seguinte

$$x^a = x^0 + N^{-1}A^T P L^0 - N^{-1}A^T P L^C \quad (3.67),$$

a qual é uma expressão linear e as parcelas formadas por x^0 e $N^{-1}A^T P L^C$ são constantes.

Considerando, agora, a (3.63) e aplicando a (3.67), obtêm-se

$$\Sigma_X a = N^{-1}A^T P \Sigma_{L^0} (N^{-1}A^T P)^T \quad (3.68)$$

e considerando que P e N^{-1} são matrizes simétricas, então se pode reescrever a (3.68) da forma seguinte

$$\Sigma_X a = N^{-1}A^T P \Sigma_{L^0} P A N^{-1} \quad (3.69)$$

mas, considerando a (3.62), é possível substituir na expressão (3.69) a matriz variância-covariância dos valores observados, conseguindo-se, então, a que segue:

$$\Sigma_X a = \sigma_0^2 N^{-1} A^T P P^{-1} P A N^{-1} \quad (3.70)$$

onde, feitas as operações possíveis, se chega à seguinte conclusão

$$\Sigma_X a = \sigma_0^2 N^{-1} \quad (3.71),$$

na qual se pode obter a matriz variância-covariância das incógnitas ou dos parâmetros, quando a matriz N é não-singular.

Considere-se, então, a (3.70) mas com a matriz dos coefi

cientes das equações normais singular e, assim, tem-se

$$\Sigma_X a = \sigma_0^2 N^+ A^T P P^{-1} P A N^+ \quad (3.72),$$

que se efetuando as operações possíveis chega-se a

$$\Sigma_X a = \sigma_0^2 N^+ N N^+ \quad (3.73)$$

mas, de acordo com a definição da pseudo-inversa, é possível que se possa escrever a seguinte expressão

$$\Sigma_X a = \sigma_0^2 N^+ \quad (3.74)$$

3.5.6 - Erro Médio

Conforme Mikhail (1976)¹⁶, pode-se definir erro médio do vetor X como a raiz quadrada da razão do traço da matriz variância-covariância pela sua ordem, o que, simbolicamente, se pode representar por:

$$\sigma_m = (\text{tr. } \Sigma / n)^{1/2} = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \dots + \sigma_{nn}^2)^{1/2} / n^{1/2} \quad (3.75)$$

3.5.7 - Variância da Unidade de Peso a Posteriori

A variância da unidade de peso a posteriori, $\hat{\sigma}_0^2$, pode ser calculada a partir dos resíduos e da matriz dos pesos das observações, de acordo com Mikhail (1976)¹⁶

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} \quad (3.76)$$

mas, considerando a (3.50), pode-se reescrever a expressão (3.76), conforme segue

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{X^T A^T P A X - 2X^T A^T P L + L^T P L}{n - u}$$

ou ainda,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{X^T N X - 2X^T U + L^T P L}{n - u}$$

e

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{X^T (N X - U) - X^T U + L^T P L}{n - u},$$

porém, considerando a (3.54), então a expressão supra se transforma em

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{L^T P L - X^T U}{n - u} \quad (3.77),$$

onde n representa o número de equações definido pela (3.39) e u é o número de incógnitas ou de parâmetros definidos pela (3.40).

A forma quadrática $V^T P V$ é de importância fundamental, em qualquer ajustamento, e, por isso, deve ser testada com a estaa

tística qui-quadrado que para testes de hipóteses bilaterais, tem-se

$$\chi^2_{\alpha/2} < \frac{(n-u)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (3.78),$$

sendo que, na hipótese H_0 , se aceita a igualdade de variâncias da unidade de peso a priori e a posteriori quando a inequação definida acima se verificar a um nível α de significância. Quando a (3.78) não se verificar ao nível α de significância, então existirá a hipótese H_1 , na qual a desigualdade das variâncias da unidade de peso são significativas e, assim, o ajustamento deve ter:

- a) problemas com o modelo matemático,
- b) observações grosseiras e
- c) incompatibilidade das variâncias das observações com a precisão requerida para os resultados.

Assim, a aceitação da hipótese H_1 alerta o geodesta para a necessidade de pesquisar as causas que provocam tal situação a fim de procurá-las solucionar.

4 - EXPERIÊNCIAS

4.1 - Introdução

Neste capítulo, com a intenção de testar o método aqui descrito, faz-se o ajustamento de um trecho da triangulação brasileira. Para tanto, criaram-se várias situações e foram analisados os seus resultados à luz do exposto nos capítulos anteriores.

4.2 - Trecho da Triangulação

O trecho da triangulação brasileira aqui utilizado foi gentilmente cedido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística ao curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná.

O referido trecho, desenvolve-se no estado de Goiás, entre os paralelos $14^{\circ}20' S$ e $15^{\circ}20' S$ e os meridianos $48^{\circ}40' W$ e $49^{\circ}40' W$, com 18 vértices, apresenta as seguintes características:

- a) 70 ângulos,
- b) 1 azimuth de Laplace,
- c) 1 base de verificação e
- d) 2 vértices com coordenadas conhecidas.

No anexo 1 encontra-se um mapa do trecho da triangulação em estudo que permitirá uma maior visualização da mesma. No anexo 2 estão inseridos os valores das direções observadas médias, do azimuth de Laplace, da base e das coordenadas dos vértices

jã definidos, elementos esses fornecidos pelo IBGE.

No anexo 3, encontram-se, em separado, as 7 figuras que compõem a rede de triangulação. Para cada figura apresenta-se a relação de seus triângulos com o valor de seus ângulos internos observados, seus erros de fechamento, seus excessos esféricos e as distâncias de seus lados.

No anexo 4, pode-se ver os resultados dos transportes de coordenadas efetuados com os ângulos e distâncias do anexo 3. As coordenadas, assim obtidas, são as coordenadas aproximadas. Para o efeito, utilizaram-se as fórmulas da latitude média de Gauss, com o auxílio de um programa para minicalculadora de mesa.

Os cálculos realizados para a obtenção dos resultados nos anexos 3 e 4 foram realizados com o auxílio de fórmulas apresentadas no capítulo segundo.

Todos esses anexos permitirão uma idéia do trecho da triangulação geodésica anteriormente descrita e que serviu para as experiências.

4.3 - Variâncias das Observações e das Injunções

4.3.1 - Variância para Ângulos

O critério utilizado para o estabelecimento da variância dos ângulos da triangulação foi feito com o auxílio da expressão de Ferrero, que pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sigma_{\text{ang.}}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^r w_i^2}{r} \right) / 3r ,$$

onde r é o número de triângulos que a rede é formada e W_i o erro de fechamento do i -ésimo triângulo.

A utilização da fórmula de Ferrero forneceu, como variância angular, o seguinte valor:

$$\sigma_{ang.}^2 \cong 0,145''^2.$$

4.3.2 - Variância para Azimute de Laplace

Quanto ao azimute de Laplace, estabeleceu-se, como erro médio quadrático, o valor limite da Tabela I à p. 08. Dessa forma, à luz da teoria estatística, ter-se-á, como variância azimutal, o seguinte valor:

$$\sigma_{az}^2 = 0,2025''^2.$$

4.3.3 - Variância para Base

No que concerne à base, considerou-se um valor inferior ao limite das especificações da Tabela I. Assim, considerando que o erro relativo não deverá ser superior a

$$1:1.000.000$$

para redes de 1^a ordem; então, para uma base de 22.192,9483 m, o erro relativo máximo deverá ser

$$0,0222 \text{ m},$$

o que implicaria numa variância na ordem de

$$\sigma_B^2 = 0,0049 \text{ m}^2.$$

Entretanto, escolheu-se como variância para a base o valor discriminado a seguir:

$$\sigma_B^2 = 0,0001 \text{ m}^2.$$

4.3.4 - Variância para Injunções de Posição

No tocante às coordenadas geodésicas dos v̄rtices j̄a conhecidos, a escolha do valor que melhor representasse a precis̄o dos mesmos foi um problema delicado. Para se conhecer a precis̄o das coordenadas de v̄rtices j̄a ajustados seria necess̄rio conhecer-se a matriz variância-covariância do ajustamento que originou tais coordenadas. Tal conhecimento nem sempre ̄ possí-vel em virtude de requerer a invers̄o (Cayley ou pseudo) da matriz das equações normais, provocando problemas computacionais ̄ medida em que a dimens̄o da mesma aumenta, n̄o sendo, portanto, o caminho mais adequado para a soluç̄o de sistemas com matrizes de grande porte. Na impossibilidade de tal procedimento, j̄a seria boa a informaç̄o de que os resultados est̄o sujeitos a um erro de determinada ordem.

Face ao acima exposto e considerando que n̄o h̄a conhecimento da precis̄o com que est̄o determinadas as coordenadas dos v̄rtices da triangulaç̄o brasileira, optou-se pelo seguinte:

- fazer um ajustamento em que n̄o houvesse injunções de posiç̄o, isto ̄, $d\lambda_i$ e $d\phi_i$ dos v̄rtices j̄a conhecidos deve ser zero, visto tratar-se de pontos fixos e
- fazer v̄rios ajustamentos com diferentes variâncias pa

ra as injunções de posição.

Ao analisar esses ajustamentos, constata-se que o valor das coordenadas é idêntico em todos; entretanto, a Tabela IV mostra os erros médios quadráticos (σ_i) arbitrados às injunções de posição, as variâncias da unidade de peso a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$), os traços da matriz variância-covariância (T) dos parâmetros e o erro médio (σ_{m_i}).

Tabela IV - Precisão das Injunções de Posição

AJUSTAMENTO	σ_i (")	$\hat{\sigma}_0^2$ ("" ²)	T ("" ²)	σ_{m_i} (")
S/inj.de pos.	-	1,5620	0,0021759	0,00825
C/injunções de posição	0,01	1,6463	0,0636458	0,04205
	0,005	1,6463	0,0176291	0,02213
	0,001	1,6463	0,0029038	0,00898
	0,0005	1,6463	0,0024436	0,00824
	0,0001	1,6463	0,0022964	0,00799

Face aos resultados encontrados, optou-se como variância para as injunções de posição o valor

$$\sigma_{ip}^2 = 0,0000\ 0001''^2.$$

4.4 - Ajustamento via Álgebra de Cayley

Foram realizados três ajustamentos da rede de triangulação, pelo método aqui preconizado, fazendo-se as seguintes con-

siderações:

1º) incluindo todas as injunções iniciais,

2º) incluindo somente dois v̄rtices de coordenadas conhecidas e

3º) incluindo um azimute de Laplace, uma base e um v̄rtice como injunção de posição.

Os resultados de cada ajustamento podem ser vistos nas Tabelas V, VI e VII, respectivamente, para cada situação acima descrita. Além das coordenadas dos v̄rtices, se inseriram, também, os erros médios quadráticos das coordenadas de cada v̄rtice, o traço da matriz variância dos parâmetros e o erro médio das coordenadas.

Evidentemente, como já era de se esperar, as coordenadas ajustadas não são idênticas nos três ajustamentos. Parece importante saber se essas alterações provocaram diferenças significativas na estrutura da rede de triangulação geodésica. Para o efeito, escolheram-se três lados da rede, sendo um em cada extremidade e o outro sensivelmente a meio da rede. Dessa forma, tem-se os lados

São João - São Pedro,

Nortelância - Espia e

Laje - Uruaçu.

Com o problema inverso, calcularam-se suas distâncias utilizando-se as coordenadas ajustadas de cada um dos três ajustamentos, anteriormente citados. Os resultados desses cálculos podem ser vistos na Tabela VIII.

Tabela V - Ajustamento com todas as Injunções Iniciais

VÉRTICE	LATITUDE			E.M.Q. DA LATITUDE*	LONGITUDE			E.M.Q. DA LONGITUDE
	0	'	"		0	'	"	
São João	- 15	18	31,1833	0,0001	- 48	46	42,3244	0,0001
São Pedro	- 15	14	54,2889	0,0001	- 49	03	27,0205	0,0001
Porteirinha	- 15	05	27,4011	0,0016	- 48	47	48,8873	0,0020
Passa Três	- 15	03	43,6241	0,0015	- 49	00	00,3697	0,0018
Tomé	- 15	05	51,7055	0,0027	- 49	14	36,9266	0,0023
Serrinha	- 15	15	38,4078	0,0024	- 49	15	56,4564	0,0026
Jenipapo	- 15	17	08,3035	0,0045	- 49	28	43,7539	0,0048
Europa	- 15	05	35,5528	0,0053	- 49	31	33,3888	0,0048
Nortelândia	- 14	57	28,8869	0,0046	- 49	21	39,3702	0,0040
Espia	- 14	48	01,1732	0,0055	- 49	14	57,9237	0,0053
Pontinha	- 14	48	23,1174	0,0073	- 49	33	51,2886	0,0064
Estiva	- 14	44	43,2856	0,0063	- 49	20	12,8510	0,0057
Santana	- 14	39	26,8806	0,0077	- 49	27	35,8637	0,0069
Dourado	- 14	39	12,6915	0,0069	- 49	15	34,1711	0,0068
Peixe	- 14	30	17,2775	0,0085	- 49	24	11,3038	0,0079
Catingueiro	- 14	30	01,0689	0,0079	- 49	17	44,8506	0,0078
Laje	- 14	23	33,1748	0,0074	- 49	09	55,1608	0,0087
Uruaçu	- 14	34	34,2382	0,0073	- 49	04	56,9815	0,0074
Variância da unidade de peso a posteriori								1,83825
Traço da matriz variância-covariância								0,001089 ²
Erro médio								0,005502"

* E.M.Q.: Erro Médio Quadrático

Tabela VI - Ajustamento com Dois Vértices de Coordenadas
Conhecidas

VÉRTICE	LATITUDE 0' " "	E.M.Q. DA LATITUDE "	LONGITUDE 0' " "	E.M.Q. DA LONGITUDE "
São João	- 15 18 31,1833	0,0001	- 48 46 42,3244	0,0001
São Pedro	- 15 14 54,2889	0,0001	- 49 03 27,0205	0,0001
Porteirinha	- 15 05 27,4004	0,0015	- 48 47 48,8871	0,0019
Passa Três	- 15 03 43,6230	0,0015	- 49 00 00,3702	0,0018
Tomé	- 15 05 51,7049	0,0030	- 49 14 36,9292	0,0024
Serrinha	- 15 15 38,4098	0,0024	- 49 15 56,4581	0,0029
Jenipapo	- 15 17 08,3086	0,0049	- 49 28 43,7592	0,0063
Europa	- 15 05 35,5549	0,0063	- 49 31 33,3973	0,0064
Nortelândia	- 14 57 28,8843	0,0059	- 49 21 39,3774	0,0047
Espia	- 14 48 01,1651	0,0076	- 49 14 57,9297	0,0061
Pontinha	- 14 48 23,1141	0,0103	- 49 33 51,3022	0,0081
Estiva	- 14 44 43,2771	0,0090	- 49 20 12,8609	0,0071
Santana	- 14 39 26,8724	0,0115	- 49 27 35,8786	0,0088
Dourado	- 14 39 12,6786	0,0102	- 49 15 34,1801	0,0084
Peixe	- 14 30 17,2634	0,0137	- 49 24 11,3218	0,0111
Catingueiro	- 14 30 01,0515	0,0132	- 49 17 44,8658	0,0111
Laje	- 14 23 33,1487	0,0151	- 49 09 55,1748	0,0136
Uruaçu	- 14 34 34,2167	0,0117	- 49 04 56,9861	0,0109
Variância da unidade de peso a posteriori			1,646326	
Traço da matriz variância-covariância			0,0022964"²	
Erro médio			0,0079867"	

Tabela VII - Ajustamento com um Azimute de Laplace, uma Base e um Vértice de Coordenada Conhecida

VÉRTICE	LATITUDE	E.M.Q DA LATITUDE	LONGITUDE	E.M.Q DA LONGITUDE
	0 ' "		0 ' "	
São João	- 15 18 31,1833	0,0001	- 48 46 42,3244	0,0001
São Pedro	- 15 14 54,2805	0,0070	- 49 03 27,0068	0,0064
Porteirinha	- 15 05 27,4084	0,0052	- 48 47 48,8774	0,0055
Passa Três	- 15 03 43,6243	0,0081	- 49 00 00,3512	0,0074
Tomé	- 15 05 51,6955	0,0117	- 49 14 36,9019	0,0104
Serrinha	- 15 15 38,3929	0,0113	- 49 15 56,4366	0,0100
Jenipapo	- 15 17 08,2825	0,0152	- 49 28 43,7301	0,0128
Europa	- 15 05 35,5347	0,0163	- 49 31 33,3584	0,0136
Nortelândia	- 14 57 28,8759	0,0143	- 49 21 39,3397	0,0128
Espia	- 14 48 01,1673	0,0142	- 49 14 57 8901	0,0139
Pontinha	- 14 48 23,1040	0,0179	- 49 33 51,2502	0,0162
Estiva	- 14 44 43,2781	0,0156	- 49 20 12,8155	0,0148
Santana	- 14 39 26,8722	0,0174	- 49 27 35,8247	0,0165
Dourado	- 14 39 12,6863	0,0156	- 49 15 34,1341	0,0157
Peixe	- 14 30 17,2715	0,0177	- 49 24 11,2640	0,0172
Catingueiro	- 14 30 01,0640	0,0167	- 49 17 44,8121	0,0167
Laje	- 14 23 33,1705	0,0158	- 49 09 55,1220	0,0173
Uruaçu	- 14 34 34,2343	0,0154	- 49 04 56,9441	0,0162
Variância da unidade de peso a posteriori				1,646320
Traço da matriz variância-covariância				0,0066817" ²
Erro médio				0,013624

Tabela VIII - Algumas Distâncias nos Três Ajustamentos

AJUSTAMENTO	Lado (m)	São João -	Nortelandia	Laje -
		- São Pedro	Espia	- Uruaçu
C/ todas injunções		30.708,694	21.177,042	22.192,979
C/ 2 v̄rtices conhecidos		30.708,694	21.177,202	22.193,222
C/1 az., 1 base e 1 v̄rtice conh.		30.708,351	21.176,966	22.192,974

4.5 - Ajustamento com Deficiência de Característica

Com a mesma rede, já citada, foi criada falta de injunções na totalidade ou em parte, provocando, assim, deficiência de característica e, conseqüentemente, a obrigatoriedade da resolução das equações normais via pseudo-inversas. A seguir, são apresentadas todas as combinações possíveis de ajustamento considerando a falta no todo ou em parte das injunções que dão escala e impedem rotações e translações à rede.

4.5.1 - Ajustamento Livre

Ignorou-se a existência do azimuth de Laplace e da base. Quanto aos v̄rtices de coordenadas conhecidas, o São João e o São Pedro não foram considerados para a formação de equações de injunção de posição.

Os resultados desse ajustamento estão inseridos na Tabela IX.

Tabela IX - Ajustamento sem Injunções

VÉRTICE	LATITUDE 0' "	E.M.Q. DA LATITUDE "	LONGITUDE 0' "	E.M.Q. DA LONGITUDE "
São João	- 15 18 31,1927	0,0044	- 48 46 42,3415	0,0040
São Pedro	- 15 14 54,3163	0,0013	- 49 03 27,0541	0,0014
Porteirinha	- 15 05 27,4008	0,0037	- 48 47 48,9251	0,0044
Passa Três	- 15 03 43,6374	0,0025	- 49 00 00,4182	0,0024
Tomé	- 15 05 51,7398	0,0019	- 49 14 36,9873	0,0018
Serrinha	- 15 15 38,4538	0,0018	- 49 15 56,5018	0,0020
Jenipapo	- 15 17 08,3702	0,0031	- 49 28 43,8099	0,0024
Europa	- 15 05 35,6111	0,0023	- 49 31 33,4684	0,0023
Nortelândia	- 14 57 28,9204	0,0017	- 49 21 39,4506	0,0014
Espia	- 14 48 01,1854	0,0016	- 49 14 58,0121	0,0017
Pontinha	- 14 48 23,1588	0,0015	- 49 33 51,3985	0,0022
Estiva	- 14 44 43,3011	0,0011	- 49 20 12,9524	0,0011
Santana	- 14 39 26,9023	0,0014	- 49 27 35,9813	0,0013
Dourado	- 14 39 12,6930	0,0013	- 49 15 34,2724	0,0014
Peixe	- 14 30 17,2820	0,0017	- 49 24 11,4361	0,0019
Catingueiro	- 14 30 01,0618	0,0017	- 49 17 44,9723	0,0018
Laje	- 14 23 33,1432	0,0037	- 49 09 55,2830	0,0035
Uruaçu	- 14 34 34,2135	0,0033	- 49 04 57,0776	0,0031
Variância da unidade de peso a posteriori			1,837489	
Traço da matriz variância-covariância			0,00020962"²	
Erro médio			0,002413"	

4.5.2 - Ajustamento com Escala Definida

Neste tipo de ajustamento, apenas se deu escala à rede com uma equação de observação para a base. Dessa forma, o azimute de Laplace é ignorado e os vértices de coordenadas conhecidas São João e São Pedro não são considerados para a formação de equações de injunção. Os resultados desse ajustamento estão inseridos na Tabela X.

4.5.3 - Ajustamento com Orientação Definida

Neste tipo de ajustamento deu-se orientação à rede com uma equação de injunção para azimute de Laplace. Sendo assim, são ignorados a base e os dois vértices de coordenadas conhecidas para a formação de equações de injunção. Os resultados desse ajustamento estão inseridos na Tabela XI.

4.5.4 - Ajustamento com Posição Definida

Neste caso, o vértice São Pedro é considerado como uma equação de injunção. O azimute de Laplace e a base, agora, não estão sendo considerados. Os resultados desse ajustamento estão inseridos na Tabela XII.

4.5.5 - Ajustamento com Escala e Orientação Definidas

Agora, somente a base e o azimute de Laplace são considerados para este ajustamento. Os vértices, São João e São Pedro, de coordenadas conhecidas, são ignorados para a elaboração de equações de posição. Os resultados desse ajustamento estão incluídos na Tabela XIII.

Tabela X - Ajustamento com Escala Definida

VÉRTICE	LATITUDE 0' " "	E.M.Q. DA LATITUDE "	LONGITUDE 0' " "	E.M.Q. DA LONGITUDE "
São João	- 15 18 31,1559	0,0086	- 48 46 42,3817	0,0088
São Pedro	- 15 14 54,2850	0,0056	- 49 03 27,0698	0,0031
Porteirinha	- 15 05 27,3831	0,0049	- 48 47 48,9639	0,0092
Passa Três	- 15 03 43,6223	0,0032	- 49 00 00,4391	0,0050
Tomé	- 15 05 51,7217	0,0029	- 49 14 36,9868	0,0017
Serrinha	- 15 15 38,4215	0,0053	- 49 15 56,4993	0,0021
Jenipapo	- 15 17 08,3359	0,0056	- 49 28 43,7887	0,0047
Europa	- 15 05 35,5936	0,0028	- 49 31 33,4432	0,0048
Nortelândia	- 14 57 28,9147	0,0014	- 49 21 39,4400	0,0024
Espia	- 14 48 01,1934	0,0025	- 49 14 58,0113	0,0017
Pontinha	- 14 48 23,1664	0,0023	- 49 33 51,3702	0,0049
Estiva	- 14 44 43,3139	0,0028	- 49 20 12,9440	0,0018
Santana	- 14 39 26,9229	0,0040	- 49 27 35,9622	0,0030
Dourado	- 14 39 12,7139	0,0039	- 49 15 34,2709	0,0015
Peixe	- 14 30 17,3160	0,0053	- 49 24 11,4221	0,0024
Catingueiro	- 14 30 01,0960	0,0050	- 49 17 44,9677	0,0019
Laje	- 14 23 33,1868	0,0050	- 49 09 55,2899	0,0033
Uruaçu	- 14 34 34,2410	0,0054	- 49 04 57,0916	0,0018
Variância da unidade de peso a posteriori			1,784988	
Traço da matriz variância-covariância			0,00069758"²	
Erro médio			0,004402"	

Tabela XI - Ajustamento com Orientação Definida

VÉRTICE	LATITUDE O ' "	E.M.Q. DA LATITUDE "	LONGITUDE O ' "	E.M.Q. DA LONGITUDE "
São João	- 15 18 31,2460	0,0103	- 48 46 42,3914	0,0098
São Pedro	- 15 14 54,3376	0,0039	- 49 03 27,0970	0,0072
Porteirinha	- 15 05 27,4518	0,0101	- 48 47 48,9487	0,0060
Passa Três	- 15 03 43,6651	0,0057	- 49 00 00,4385	0,0039
Tomé	- 15 05 51,7396	0,0019	- 49 14 37,0121	0,0038
Serrinha	- 15 15 38,4513	0,0019	- 49 15 56,5464	0,0071
Jenipapo	- 15 17 08,3433	0,0057	- 49 28 43,8577	0,0074
Europa	- 15 05 35,5785	0,0058	- 49 31 33,4930	0,0035
Nortelândia	- 14 57 28,9067	0,0027	- 49 21 39,4586	0,0014
Espia	- 14 48 01,1843	0,0016	- 49 14 58,0009	0,0029
Pontinha	- 14 48 23,1216	0,0057	- 49 33 51,3883	0,0033
Estiva	- 14 44 43,2899	0,0020	- 49 20 12,9347	0,0034
Santana	- 14 39 26,8769	0,0036	- 49 27 35,9530	0,0050
Dourado	- 14 39 12,6906	0,0014	- 49 15 34,2435	0,0051
Peixe	- 14 30 17,2630	0,0030	- 49 24 11,3894	0,0069
Catingueiro	- 14 30 01,0550	0,0021	- 49 17 44,9249	0,0067
Laje	- 14 23 33,1513	0,0033	- 49 09 55,2225	0,0077
Uruaçu	- 14 34 34,2313	0,0022	- 49 04 57,0392	0,0063
Variância da unidade de peso a posteriori			1,784973	
Traço da matriz variância-covariância			0,00102478 "	
Erro médio			0,005335 "	

Tabela XII - Ajustamento com Posição Definida

VÉRTICE	LATITUDE ° ' "	E.M.Q. DA LATITUDE "	LONGITUDE ° ' "	E.M.Q. DA LONGITUDE "
São João	- 15 18 31,1486	0,0040	- 48 46 42,3055	0,0041
São Pedro	- 15 14 54,2890	0,0001	- 49 03 27,0184	0,0001
Porteirinha	- 15 05 27,3603	0,0034	- 48 47 48,9023	0,0045
Passa Três	- 15 03 43,6090	0,0022	- 49 00 00,3946	0,0023
Tomé	- 15 05 51,7250	0,0022	- 49 14 36,9586	0,0020
Serrinha	- 15 15 38,4383	0,0022	- 49 15 56,4628	0,0022
Jenipapo	- 15 17 08,3668	0,0035	- 49 28 43,7669	0,0029
Europa	- 15 05 35,6126	0,0027	- 49 31 33,4366	0,0028
Nortelândia	- 14 57 28,9140	0,0020	- 49 21 39,4291	0,0017
Espia	- 14 48 01,1745	0,0017	- 49 14 58,0015	0,0018
Pontinha	- 14 48 23,1659	0,0017	- 49 33 51,3838	0,0025
Estiva	- 14 44 43,2958	0,0011	- 49 20 12,9441	0,0012
Santana	- 14 39 26,9052	0,0014	- 49 27 35,9769	0,0013
Dourado	- 14 39 12,6844	0,0014	- 49 15 34,2707	0,0014
Peixe	- 14 30 17,2835	0,0017	- 49 24 11,4417	0,0019
Catingueiro	- 14 30 01,0571	0,0017	- 49 17 44,9794	0,0019
Laje	- 14 23 33,1323	0,0038	- 49 09 55,2983	0,0038
Uruaçu	- 14 34 34,1956	0,0035	- 49 04 57,0827	0,0033
Variância da unidade de peso a posteriori			1,735414	
Traço da matriz variância-covariância			0,00022661 ^{"2}	
Erro médio			0,002508 ["]	

Tabela XIII - Ajustamento com Escala e Orientação Definidas

VÉRTICE	LATITUDE O ' ''	E.M.Q. DA LATITUDE ''	LONGITUDE O ' ''	E.M.Q. DA LONGITUDE ''
São João	- 15 18 31,2091	0,0129	- 48 46 42,4324	0,0120
São Pedro	- 15 14 54,3060	0,0069	- 49 03 27,1132	0,0074
Porteirinha	- 15 05 27,4342	0,0107	- 48 47 48,9880	0,0097
Passa Três	- 15 03 43,6500	0,0062	- 49 00 00,4598	0,0056
Tomé	- 15 05 51,7213	0,0028	- 49 14 37,0118	0,0037
Serrinha	- 15 15 38,4186	0,0052	- 49 15 56,5442	0,0071
Jenipapo	- 15 17 08,3084	0,0069	- 49 28 43,8366	0,0086
Europa	- 15 05 35,5607	0,0057	- 49 31 33,4676	0,0058
Nortelândia	- 14 57 28,9008	0,0024	- 49 21 39,4479	0,0024
Espia	- 14 48 01,1924	0,0024	- 49 14 58,0001	0,0029
Pontinha	- 14 48 23,1291	0,0060	- 49 33 51,3596	0,0053
Estiva	- 14 44 43,3028	0,0034	- 49 20 12,9261	0,0035
Santana	- 14 39 26,8976	0,0054	- 49 27 35,9336	0,0054
Dourado	- 14 39 12,7117	0,0039	- 49 15 34,2418	0,0051
Peixe	- 14 30 17,2972	0,0061	- 49 24 11,3750	0,0067
Catingueiro	- 14 30 01,0896	0,0052	- 49 17 44,9200	0,0066
Laje	- 14 23 33,1955	0,0046	- 49 09 55,2291	0,0076
Uruaçu	- 14 34 34,2592	0,0045	- 49 04 57,0531	0,0060
Variância da unidade de peso a posteriori			1,735389	
Traço da matriz variância-covariância			0,00147540'' ²	
Erro médio			0,006402''	

4.5.6 - Ajustamento com Escala e Posição Definidas

Nesta situação é desconsiderado o azimute de Laplace. Entretanto, a base vai contribuir para a formação de uma equação de observação e o vértice São Pedro para a inclusão de uma equação de posição. Os resultados desses ajustamentos podem ser vistos na Tabela XIV.

4.5.7 - Ajustamento com Orientação e Posição Definidas

Neste caso, o ajustamento livre está desprovido de escala e são considerados o azimute de Laplace e o vértice São Pedro para contribuírem com duas equações de injunção, sendo uma para orientação e a outra para posição. Os resultados desse ajustamento podem ser vistos na Tabela XV.

4.5.8 - Resultados do Ajustamento com Deficiência de Característica

De forma análoga, ao que foi considerado na seção 4.4, quando se estipularam aqueles três lados da triangulação, proceder-se-á, aqui, com o intuito de verificar se os resultados dos diferentes ajustamentos provocaram diferenças significativas na estrutura da rede. Portanto, com o auxílio do problema inverso, calcularam-se as distâncias dos três lados para cada tipo de ajustamento com deficiência de característica aqui apresentado e os resultados estão inseridos na Tabela XVI.

4.6 - Resultados Globais

Para que fique melhor evidenciado, reuniu-se na Tabela XVII o erro médio de todos os ajustamentos realizados, que se pode ver a seguir.

Tabela XIV - Ajustamento com Escala e Posição Definidas

VÉRTICE	LATITUDE O I "	E.M.Q. DA LATITUDE "	LONGITUDE O I "	E.M.Q. DA LONGITUDE "
São João	- 15 18 31,1437	0,0043	- 48 46 42,3266	0,0063
São Pedro	- 15 14 54,2890	0,0001	- 49 03 27,0184	0,0001
Porteirinha	- 15 05 27,3720	0,0039	- 48 47 48,9221	0,0068
Passa Três	- 15 03 43,6230	0,0039	- 49 00 00,3992	0,0027
Tomé	- 15 05 51,7366	0,0038	- 49 14 36,9447	0,0035
Serrinha	- 15 15 38,4376	0,0021	- 49 15 56,4471	0,0042
Jenipapo	- 15 17 08,3644	0,0033	- 49 28 43,7350	0,0073
Europa	- 15 05 35,6249	0,0044	- 49 31 33,4014	0,0074
Nortelândia	- 14 57 28,9364	0,0056	- 49 21 39,4065	0,0049
Espia	- 14 48 01,2086	0,0076	- 49 14 57,9875	0,0036
Pontinha	- 14 48 23,2000	0,0076	- 49 33 51,3460	0,0073
Estiva	- 14 44 43,3342	0,0082	- 49 20 12,9236	0,0043
Santana	- 14 39 26,9504	0,0092	- 49 27 35,9472	0,0054
Dourado	- 14 39 12,7297	0,0091	- 49 15 34,2561	0,0036
Peixe	- 14 30 17,3401	0,0105	- 49 24 11,4165	0,0046
Catingueiro	- 14 30 01,1139	0,0102	- 49 17 44,9623	0,0038
Laje	- 14 23 33,1971	0,0101	- 49 09 55,2911	0,0045
Uruaçu	- 14 34 34,2465	0,0103	- 49 04 57,0815	0,0034
Variância da unidade de peso a posteriori			1,688510	
Traço da matriz variância-covariância			0,00134992 ²	
Erro médio			0,006124 ["]	

Tabela XV - Ajustamento com Orientação e Posição Definidas

VÉRTICE	LATITUDE 0' " "	E.M.Q. DA LATITUDE "	LONGITUDE 0' " "	E.M.Q. DA LONGITUDE "
São João	- 15 18 31,1966	0,0069	- 48 46 42,3157	0,0043
São Pedro	- 15 14 54,2890	0,0001	- 49 03 27,0184	0,0001
Porteirinha	- 15 05 27,4046	0,0065	- 48 47 48,8729	0,0053
Passa Três	- 15 03 43,6183	0,0026	- 49 00 00,3606	0,0045
Tomé	- 15 05 51,6927	0,0042	- 49 14 36,9317	0,0041
Serrinha	- 15 15 38,4027	0,0047	- 49 15 56,4656	0,0021
Jenipapo	- 15 17 08,2946	0,0090	- 49 28 43,7747	0,0027
Europa	- 15 05 35,5318	0,0092	- 49 31 33,4096	0,0049
Nortelândia	- 14 57 28,8612	0,0059	- 49 21 39,3771	0,0065
Espia	- 14 48 01,1404	0,0040	- 49 14 57,9206	0,0095
Pontinha	- 14 48 23,0778	0,0089	- 49 33 51,3047	0,0099
Estiva	- 14 44 43,2466	0,0053	- 49 20 12,8535	0,0101
Santana	- 14 39 26,8346	0,0069	- 49 27 35,8706	0,0117
Dourado	- 14 39 12,6482	0,0044	- 49 15 34,1632	0,0118
Peixe	- 14 30 17,2222	0,0061	- 49 24 11,3077	0,0134
Catingueiro	- 14 30 01,0142	0,0050	- 49 17 44,8444	0,0133
Laje	- 14 23 33,1115	0,0050	- 49 09 55,1434	0,0141
Uruaçu	- 14 34 34,1895	0,0040	- 49 04 56,9608	0,0127
Variância da unidade de peso a posteriori				1,688488
Traço da matriz variância-covariância				0,00207838"²
Erro médio				0,007598"

Tabela XVI - Algumas Distâncias nos Ajustamentos Livres

Ajustamento \ Lado (m)	São João - - São Pedro	Nortelândia Espia	Laje - - Uruaçu
sem injunções	30.709,05	21.177,45	22.193,49
com escala	30.708,30	21.176,93	22.192,95
com orientação	30.709,06	21.177,45	22.193,49
com posição	30.708,95	21.177,38	22.193,41
c/orientação e escala	30.708,31	21.176,93	22.192,95
c/escala e posição	30.708,30	21.176,93	22.192,95
c/orientação e posição	30.708,97	21.177,39	22.193,43

Tabela XVII - Erros médios dos Ajustamentos

TIPO DE AJUSTAMENTO	INJUNÇÕES			ERRO MÉDIO
	AZIMUTE DE LAPLACE	BASE	VÉRTICES CONHECIDOS	
Álgebra de Cayley	1	1	1	0,013624
	0	0	2	0,007987
	1	1	2	0,005502
Pseudo - - Inversas	1	0	1	0,007598
	1	1	0	0,006402
	0	1	1	0,006124
	1	0	0	0,005335
	0	1	0	0,004402
	0	0	1	0,002509
	0	0	0	0,002413

4.7 - Programas Computacionais

Para se conseguir efetuar os ajustamentos da rede, foi elaborado um programa, em linguagem Fortran, o qual se encontra no anexo 5. Junto com o programa foram utilizadas dezesseis subrotinas. As subrotinas AB, VERSOL, SOMAT e PATATA são fornecidas aos alunos do CPGCG. As restantes, GMSR, RGMS, DIMED, RAIOS, TITULO, AZDIS, GERAD, GERAA, GERAZ, PSEUDO, PROINT e PROINP foram elaboradas para atender as necessidades do programa.

5 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 - Conclusões

A partir do que foi apresentado nos capítulos anteriores pode-se afirmar que a atribuição de variâncias às observações e às injunções é uma operação extremamente delicada. Tal fato vem se confirmar quando se procedeu ao teste para atribuir as variâncias das injunções de posição (Tabela IV) e constata-se que a variância, ao diminuir, faz o erro médio dos parâmetros decrescer. A certo momento, parece querer estabilizar e o ponto de início de tal fase pode ser considerado como o erro médio obtido com o ajustamento realizado, onde se considera os v̄rtices São João e São Pedro totalmente fixos. Os erros inerentes às injunções de posição parecem querer se transmitir aos parâmetros da rede.

Quando são feitos os ajustamentos da triangulação via álgebra de Cayley, constata-se que o erro médio quadrático da latitude e da longitude aumenta ã medida em que os v̄rtices vão se tornando cada vez mais afastados daqueles que a fixou ao elipsóide. Por outro lado, verifica-se que a inclusão da base Laje-Uruaçu e o azimute de Laplace Uruaçu-Dourado, na outra extremidade da rede, fizeram baixar o erro médio das coordenadas dos v̄rtices. Quanto ã estrutura da rede, parece não ter havido diferenças significativas, conforme se pode constatar na Tabela VIII.

Quanto ao ajustamento livre, em todos os ajustamentos realizados e aqui descritos, parece não ter existido diferenças sig

nificativas na estrutura da rede, conforme se pode constatar na Tabela XVI. Quando o ajustamento está totalmente desprovido de injunções, verifica-se que, os erros médios quadráticos das coordenadas vão aumentando à medida que os vértices se afastam do centro de gravidade da rede.

A análise comparativa entre os ajustamentos, via álgebra de Cayley e via pseudo-inversas, conduz à informação que o erro médio dos parâmetros no ajustamento livre foi inferior em comparação com os dos ajustamentos realizados via álgebra de Cayley onde não há excesso de injunções. Tal fato é facilmente constatado na Tabela XVII.

5.2 - Recomendações

De tudo o que foi visto parece oportuno recomendar a utilização do ajustamento livre, visto que, neste trabalho, e com aquela rede, conduziu a resultados mais preciso, isto é, as coordenadas geodésicas sujeitas a um erro menor.

Recomenda-se, também, o estudo do ajustamento livre e sua aplicação em outros campos da Geodésia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

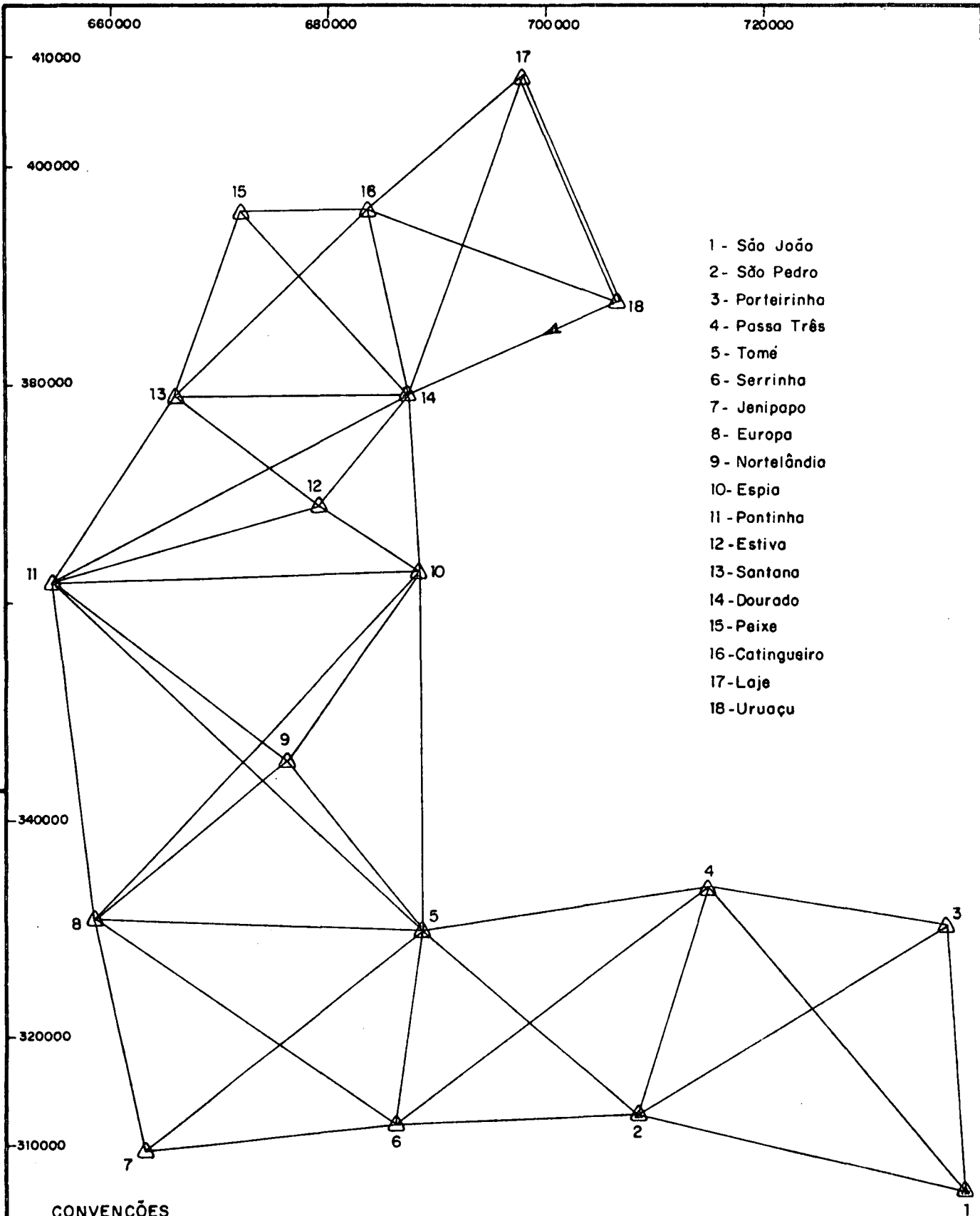
- 1 - BOULLION, Thomas L. & ODELL, Patrick L. Generalized inverse matrices. New York, John Wiley & Sons, 1971. 103 p.
- 2 - DOMINGUES, Felipe Augusto Aranha. Topografia e astronomia de posição para engenheiros e arquitetos. São Paulo, McGraw-Hill, 1979. 406 p.
- 3 - EL-HAKIM, Sabry F. Potencial and limitations of photogrammetry for precision surveying. Technical Report, Department of Surveying Engineering University of New Brunswick, Fredericton, (63): 1-168, 1979.
- 4 - ESTADOS UNIDOS. Department of Commerce. Federal Geodetic Control Committee. Classification standards of accuracy, and general specifications of geodetic control surveys. Rockville, Md., 1974, 12p.
- 5 - GEMAEL, Camil. Gravidade normal no sistema geodésico de referência 1967. Boletim da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, (13):1-28, 1972.
- 6 - _____. Aplicações do cálculo matricial em geodésia. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974. 103 p.
- 7 - _____. Ajustamento: variação de coordenadas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976. 50 p.
- 8 - _____. Introdução à geodésia geométrica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1977. 152 p.
- 9 - _____. Inversas generalizadas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1977. 30 p.
- 10 - _____. Elementos de trigonometria esférica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1978. 86 p.
- 11 - _____. Geodésia Física. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1978. 166 p.
- 12 - _____. Referenciais cartesianos utilizados em Geodésia. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1982. 75 p.

- 13 - KRAKIWSKY, E. J. & THOMSON, Donald B. Geodetic position computations. Lecture Notes, Department of Surveying Engineering University of New Brunswick, Fredericton, (39): 1-99, 1974.
- 14 - _____ & THOMSON, Donald B. Mathematical models for horizontal geodetic networks. Lecture Notes, Department of Surveying Engineering University of New Brunswick, (48): 1-34, 1978.
- 15 - LIPSCHUTZ, Seymour. Álgebra linear. São Paulo, McGraw-Hill, 1977. 413 p.
- 16 - MIKHAIL, Edward M. Observations and least squares. New York, Thomas Y. Crowell Company, 1976. 497 p.
- 17 - MODRO, Nelson. Métodos para inversão de matrizes: aplicações às ciências geodésicas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1981. 75 p. Dissertação de Mestrado.
- 18 - RAO, C. Radhakrishna & MITRA, Sujit Kumar. Generalized inverse of matrices and its applications. New York, Wiley & Sons, 1971. 240 p.
- 19 - VANÍČEK, Petr. Introduction to adjustment calculus. Lecture Notes, Department of Surveying Engineering University of New Brunswick, Fredericton, (35):1-241, 1974.
- 20 - WANDRESEN, Romualdo. Métodos iterativos para a solução de sistemas de equações normais. Curitiba, Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1980. 214 p. Dissertação de Mestrado.
- 21 - WELLS, D. E. Matrices. Lecture Notes, Department of Surveying Engineering University of New Brunswick, Fredericton, (15):1-87, 1971.

ANEXOS

ANEXO 1

MAPA DA TRIANGULAÇÃO

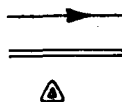


CONVENÇÕES

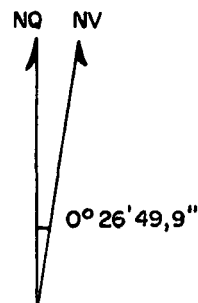
Azimute de Laplace

Base

Coordenadas conhecidas



CONVERGÊNCIA MERIDIANA NO
VÉRTICE ESPIA



PROJEÇÃO UNIVERSAL TRANSVERSA DE MERCATOR

ESCALA : 1 : 500 000

MERIDIANO CENTRAL 51° W

DATUM HORIZONTAL : CHUÁ

ANEXO 2

DIREÇÕES, AZIMUTE DE LAPLACE, BASE E COORDENADAS GEODÉSICAS
CONHECIDAS DA TRIANGULAÇÃO

LISTA DE DIREÇÕES OBSERVADAS MÉDIAS

ESTAÇÃO	PONTO VISADO	DIREÇÃO
São João	São Pedro	000 ⁰ 00' 00,00"
	Passa Três	36 20 31,35
	Porteirinha	72 46 53,09
São Pedro	Serrinha	000 00 00,00
	Tomê	43 17 58,95
	Passa Três	110 09 58,41
	Porteirinha	151 38 33,10
	São João	196 04 21,29
Porteirinha	São João	000 00 00,00
	São Pedro	62 47 19,98
	Passa Três	102 59 34,51
Passa Três	Porteirinha	000 00 00,00
	São João	40 34 04,79
	São Pedro	98 19 12,01
	Serrinha	134 02 40,61
	Tomê	163 04 56,30
Tomê	Passa Três	000 00 00,00
	São Pedro	48 22 17,24
	Serrinha	106 01 01,58
...		

ESTAÇÃO	PONTO VISADO	DIREÇÃO		
...	Jenipapo	149	02	38,92
	Europa	189	25	14,59
	Pontinha	231	32	03,26
	Nortelândia	239	16	22,55
	Espia	277	25	37,70
Serrinha	Jenipapo	000	00	00,00
	Europa	40	24	05,88
	Tomé	104	24	45,43
	Passa Três	149	21	29,49
	São Pedro	183	28	03,15
Jenipapo	Europa	000	00	00,00
	Tomé	63	58	04,50
	Serrinha	96	31	44,48
Europa	Pontinha	000	00	00,00
	Espia	49	59	20,31
	Nortelândia	57	17	41,91
	Tomé	98	22	39,89
	Serrinha	130	57	48,52
	Jenipapo	174	01	59,41
Nortelândia	Tomé	000	00	00,00
	Europa	89	03	55,18
	Pontinha	166	40	08,04
				...

ESTAÇÃO	PONTO VISADO	DIREÇÃO		
...	Espia	253	44	53,49
Espia	Tomé	000	00	00,00
	Nortelandia	35	35	39,99
	Europa	43	36	19,18
	Pontinha	89	54	40,51
	Estiva	123	56	01,57
	Dourado	177	16	18,09
Pontinha	Santana	000	00	00,00
	Dourado	28	29	07,12
	Estiva	40	18	53,45
	Espia	54	37	03,54
	Nortelandia	93	13	18,72
	Tomé	98	48	51,26
	Europa	138	19	24,72
Estiva	Pontinha	000	00	00,00
	Santana	51	42	54,11
	Dourado	144	50	26,44
	Espia	228	19	31,20
Santana	Peixe	000	00	00,00
	Catingueiro	25	34	48,96
	Dourado	68	56	12,68
	Estiva	106	21	14,10
				...

ESTAÇÃO	PONTO VISADO	DIREÇÃO		
...				
	Pontinha	194	19	28,32
Dourado	Espia	000	00	00,00
	Estiva	43	10	39,14
	Pontinha	66	30	27,88
	Santana	92	38	06,59
	Peixe	140	33	02,27
	Catingueiro	170	49	14,11
	Laje	203	11	45,94
	Uruaçu	249	40	10,85
Peixe	Catingueiro	000	00	00,00
	Dourado	49	13	15,84
	Santana	112	22	07,73
Catingueiro	Laje	000	00	00,00
	Uruaçu	60	21	11,30
	Dourado	117	16	34,01
	Santana	175	44	03,20
	Peixe	217	47	06,19
Laje	Uruaçu	159	50	32,92
	Dourado	202	54	43,50
	Catingueiro	233	15	37,49
				...

ESTAÇÃO	PONTO VISADO	DIREÇÃO
...		
Uruaçũ	Dourado	000 00 00,00
	Catingueiro	44 13 40,91
	Laje	90 27 26,18

Azimute de Laplace:

Uruaçũ - Dourado $245^{\circ} 48' 28,89''$

Base:

Uruaçũ - Laje 22.192,9483 m

Coordenadas Geodésicas Conhecidas:

São João $\phi: 15^{\circ} 18' 31,1838''$ S
 $\lambda: 48^{\circ} 46' 42,3240''$ W

São Pedro $\phi: 15^{\circ} 14' 54,2890''$ S
 $\lambda: 49^{\circ} 03' 27,0184''$ W

ANEXO 3

FIGURAS, TRIÂNGULOS, ÂNGULOS, EXCESSO ESFÉRICO, ERRO DE FECHA-
MENTO E DISTÂNCIAS DA REDE

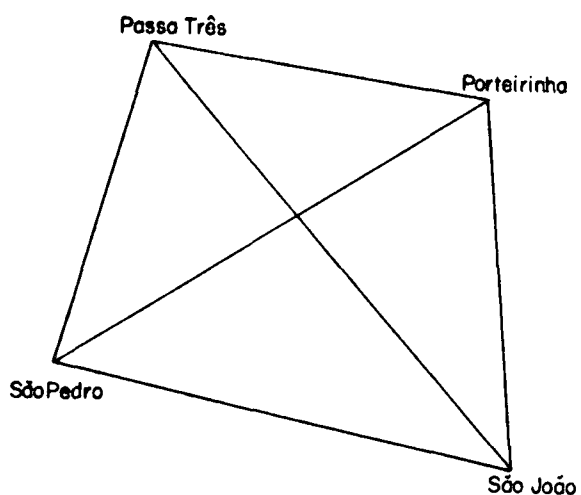


Fig. 6 - Primeira Figura

TRIÂNGULO Nº 1

São João	$72^{\circ} 46' 53,09''$	$\epsilon = 1,81''$
Porteirinha	$62^{\circ} 47' 19,98''$	
São Pedro	$44^{\circ} 25' 48,19''$	$W = - 0,55''$

São João - São Pedro	30.708,65 m
São Pedro - Porteirinha	32.982,64 m
Porteirinha - São João	24.172,41 m

TRIÂNGULO Nº 2

São João	$36^{\circ} 26' 21,74''$	$\epsilon = 1,33''$
Porteirinha	$102^{\circ} 59' 34,51''$	
Passa Três	$40^{\circ} 34' 04,79''$	$W = - 0,29''$

São João - Passa Três	36.217,11 m
Passa Três - Porteirinha	22.077,11 m
Porteirinha - São João	24.172,61 m

TRIÂNGULO Nº 3

Porteirinha	$40^{\circ} 12' 14,53''$	$\epsilon = 1,20''$
Passa Três	$98^{\circ} 19' 12,01''$	
São Pedro	$41^{\circ} 28' 34,69''$	$W = 0,03''$

Porteirinha - São Pedro	32.982,74 m
São Pedro - Passa Três	21.517,14 m
Passa Três - Porteirinha	22.077,11 m

TRIÂNGULO Nº 4

Passa Três	$57^{\circ} 45' 07,22''$	$\epsilon = 1,68''$
São Pedro	$85^{\circ} 54' 22,88''$	
São João	$36^{\circ} 20' 31,35''$	$W = - 0,23''$

Passa Três - São João	36.216,93 m
São João - São Pedro	30.708,65 m
São Pedro - Passa Três	21.517,14 m

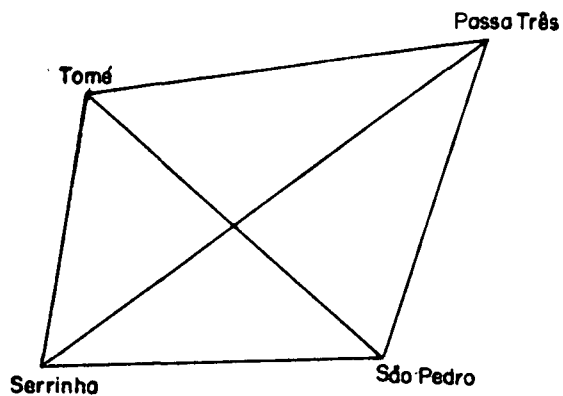


Fig. 7 - Segunda Figura

TRIÂNGULO Nº 5

São Pedro	$66^{\circ} 51' 59,46''$	$\epsilon = 1,31''$
Passa Três	$64^{\circ} 45' 44,29''$	
Tomé	$48^{\circ} 22' 17,24''$	$W = - 0,32''$

São Pedro - Tomé	26.038,97 m
Tomé - Passa Três	26.472,07 m
Passa Três - São Pedro	21.517,14 m

TRIÂNGULO Nº 6

Passa Três	$29^{\circ} 02' 15,69''$	$\epsilon = 1,18''$
Tomé	$106^{\circ} 01' 01,58''$	
Serrinha	$44^{\circ} 56' 44,06''$	$W = 0,15''$

Passa Três - Serrinha	36.018,16 m
Serrinha - Tomé	18.188,69 m
Tomé - Passa Três	26.472,07 m

TRIÂNGULO Nº 7

Tomé	$57^{\circ} 38' 44,34''$	$\epsilon = 1,02''$
Serrinha	$79^{\circ} 03' 17,72''$	
São Pedro	$43^{\circ} 17' 58,95''$	$W = - 0,01''$

Tomé - São Pedro	26.038,90 m
São Pedro - Serrinha	22.404,00 m
Serrinha - Tomé	18.188,69 m

TRIÂNGULO Nº 8

Serrinha	$34^{\circ} 06' 33,66''$	$\epsilon = 1,15''$
São Pedro	$110^{\circ} 09' 58,41''$	
Passa Três	$35^{\circ} 43' 28,60''$	$W = - 0,48''$

Serrinha - Passa Três	36.018,07 m
Passa Três - São Pedro	21.517,04 m
São Pedro - Serrinha	22.404,00 m

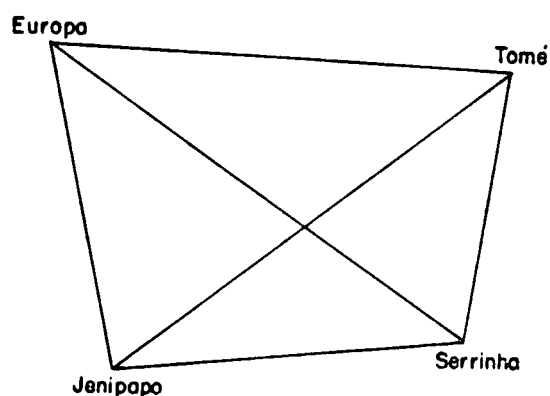


Fig. 8 - Terceira Figura

TRIÂNGULO Nº 9

Tomé	$40^{\circ} 22' 35,67''$	$\epsilon = 1,64''$
Europa	$75^{\circ} 39' 19,52''$	
Jenipapo	$63^{\circ} 58' 04,50''$	$W = - 1,95''$

Tomé - Jenipapo	32.731,90 m
Jenipapo - Europa	21.886,36 m
Europa - Tomé	30.357,66 m

TRIÂNGULO Nº 10

Europa	$43^{\circ} 04' 10,89''$	$\epsilon = 1,28''$
Jenipapo	$96^{\circ} 31' 44,48''$	
Serrinha	$40^{\circ} 24' 05,88''$	$W = - 0,03$

Europa - Serrinha	33.548,95 m
Serrinha - Jenipapo	23.059,66 m
Jenipapo - Europa	21.886,36 m

TRIÂNGULO Nº 11

Jenipapo	$32^{\circ} 33' 39,98''$	$\epsilon = 1,04''$
Serrinha	$104^{\circ} 24' 45,43''$	
Tomē	$43^{\circ} 01' 37,34''$	$W = 1,71''$

Jenipapo - Tomē	32.731,41 m
Tomē - Serrinha	18.188,28 m
Serrinha - Jenipapo	23.059,66 m

TRIÂNGULO Nº 12

Serrinha	$64^{\circ} 00' 39,55''$	$\epsilon = 1,40''$
Tomē	$83^{\circ} 24' 13,01''$	
Europa	$32^{\circ} 35' 08,63''$	$W = - 0,21''$

Serrinha - Europa	33.549,28 m
Europa - Tomē	30.357,66 m
Tomē - Serrinha	18.188,69 m

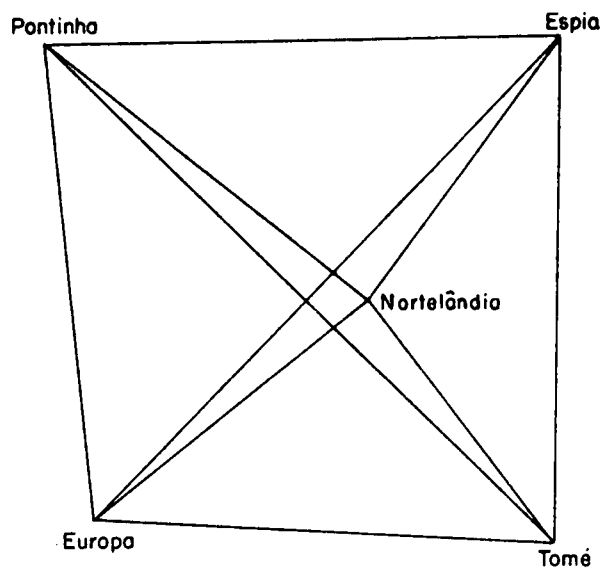


Fig. 9 - Quarta Figura

TRIÂNGULO Nº 13

Tomé	$42^{\circ} 06' 48,67''$	$\epsilon = 2,45''$
Europa	$98^{\circ} 22' 39,89''$	
Pontinha	$39^{\circ} 30' 33,46''$	$W = - 0,43''$

Tomé - Pontinha	47.207,93 m
Pontinha - Europa	31.999,05 m
Europa - Tomé	30.357,66 m

TRIÂNGULO Nº 14

Europa	$49^{\circ} 59' 20,31''$	$\epsilon = 2,75''$
Pontinha	$83^{\circ} 42' 21,18''$	
Espia	$46^{\circ} 18' 21,33''$	$W = 0,07''$

Europa - Espia	43.989,75 m
Espia - Pontinha	33.896,87 m
Pontinha - Europa	31.999,05 m

TRIÂNGULO Nº 15

Pontinha	$44^{\circ} 11' 47,22''$	$\epsilon = 2,84''$
Espia	$89^{\circ} 54' 40,51''$	
Tomê	$45^{\circ} 53' 34,44''$	$W = - 0,17''$

Pontinha - Tomê	47.207,64 m
Tomê - Espia	32.909,40 m
Espia - Pontinha	33.896,87 m

TRIÂNGULO Nº 16

Espia	$43^{\circ} 36' 19,18''$	$\epsilon = 2,55''$
Tomê	$88^{\circ} 00' 23,11''$	
Europa	$48^{\circ} 23' 19,58''$	$W = - 0,68''$

Espia - Europa	43.989,53 m
Europa - Tomê	30.357,28 m
Tomê - Espia	32.909,40 m

TRIÂNGULO Nº 17

Nortelândia	$89^{\circ} 03' 55,18''$	$\epsilon = 1,18''$
Tomê	$49^{\circ} 51' 07,96''$	$W = - 0,06''$
Europa	$41^{\circ} 04' 57,98''$	

Nortelândia - Europa	23.207,65 m
Europa - Tomé	30.357,28 m
Tomé - Nortelândia	19.951,84 m

TRIÂNGULO Nº 18

Nortelândia	$106^{\circ} 15' 06,51''$	$\epsilon = 1,03''$
Espia	$35^{\circ} 35' 39,99''$	$W = 0,62''$
Tomé	$38^{\circ} 09' 15,15''$	

Nortelândia - Tomé	19.951,84 m
Tomé - Espia	32.909,35 m
Espia - Nortelândia	21.176,84 m

TRIÂNGULO Nº 19

Nortelândia	$87^{\circ} 04' 45,45''$	$\epsilon = 1,49''$
Pontinha	$38^{\circ} 36' 15,18''$	$W = 0,34''$
Espia	$54^{\circ} 19' 00,52''$	

Nortelândia - Espia	21.176,84 m
Espia - Pontinha	33.896,69 m
Pontinha - Nortelândia	27.568,51 m

TRIÂNGULO Nº 20

Nortelândia	$77^{\circ} 36' 12,86''$	$\epsilon = 1,59''$
Pontinha	$45^{\circ} 06' 06,00''$	$W = - 0,82''$
Europa	$57^{\circ} 17' 41,91''$	

Nortelândia - Europa	23.207,69 m
Europa - Pontinha	31.998,77 m
Pontinha - Nortelândia	27.568,51 m

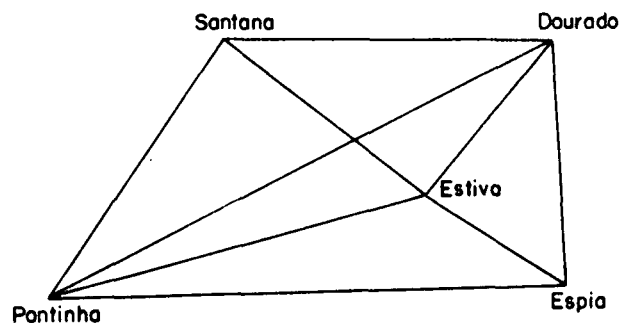


Fig. 10 - Quinta Figura

TRIÂNGULO Nº 21

Estiva	$83^{\circ} 29' 04,76''$	$\epsilon = 0,37''$
Espia	$53^{\circ} 20' 16,52''$	$W = 0,05''$
Dourado	$43^{\circ} 10' 39,14''$	

Estiva - Dourado	13.143,17 m
Dourado - Espia	16.278,68 m
Espia - Estiva	11.211,27 m

TRIÂNGULO Nº 22

Estiva	$93^{\circ} 07' 32,33''$	$\epsilon = 0,55''$
Dourado	$49^{\circ} 27' 27,45''$	$W = 0,65''$
Santana	$37^{\circ} 25' 01,42''$	

Estiva - Santana	16.437,84 m
Santana - Dourado	21.598,72 m
Dourado - Estiva	13.143,17 m

TRIÂNGULO Nº 23

Estiva	$51^{\circ} 42' 54,11''$	$\epsilon = 0,84''$
Santana	$87^{\circ} 58' 14,22''$	$W = 0,94''$
Pontinha	$40^{\circ} 18' 53,45''$	

Estiva - Pontinha	25.390,89 m
Pontinha - Santana	19.942,76 m
Santana - Estiva	16.437,84 m

TRIÂNGULO Nº 24

Estiva	$131^{\circ} 40' 28,80''$	$\epsilon = 0,54$
Pontinha	$14^{\circ} 18' 10,09''$	$W = - 0,59$
Espia	$34^{\circ} 01' 21,06''$	

Estiva-Espia	11.211,27 m
Espia - Pontinha	33.896,69 m
Pontinha - Estiva	25.391,64 m

TRIÂNGULO Nº 25

Pontinha	$26^{\circ} 07' 56,42''$	$\epsilon = 1,41''$
Espia	$87^{\circ} 21' 37,58''$	$W = 0,47''$
Dourado	$66^{\circ} 30' 27,88''$	

Pontinha - Dourado	36.921,01 m
Dourado - Espia	16.278,88 m
Espia - Pontinha	33.896,69 m

TRIÂNGULO Nº 26

Dourado	$26^{\circ} 07' 38,71''$	$\epsilon = 0,90''$
Santana	$125^{\circ} 23' 15,64''$	$W = 0,57''$
Pontinha	$28^{\circ} 29' 07,12''$	

Dourado - Pontinha	36.921,01 m
Pontinha - Santana	19.943,22 m
Santana - Dourado	21.599,15 m

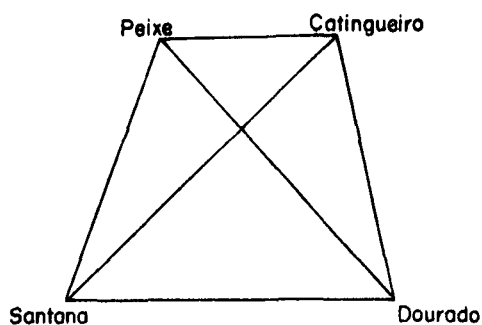


Fig. 11 - Sexta Figura

TRIÂNGULO Nº 27

Santana	$43^{\circ} 21' 23,72''$	$\epsilon = 0,94$
Dourado	$78^{\circ} 11' 07,52''$	$W = - 0,51$
Catingueiro	$58^{\circ} 27' 29,19''$	

Santana - Catingueiro	24.806,55 m
Catingueiro - Dourado	17.399,20 m
Dourado - Santana	21.599,15 m

TRIÂNGULO Nº 28

Dourado	$30^{\circ} 16' 11,84''$	$\epsilon = 0,50''$
Catingueiro	$100^{\circ} 30' 32,18''$	$W = - 0,64''$
Peixe	$49^{\circ} 13' 15,84''$	

Dourado - Peixe	22.591,86 m
Peixe - Catingueiro	11.582,27 m
Catingueiro - Dourado	17.399,20 m

TRIÂNGULO Nº 29

Catingueiro	$42^{\circ} 03' 02,99''$	$\epsilon = 0,49''$
Peixe	$112^{\circ} 22' 07,73''$	$W = - 0,81''$
Santana	$25^{\circ} 34' 48,96''$	

Catingueiro - Santana	24.806,26 m
Santana - Peixe	17.966,94 m
Peixe - Catingueiro	11.582,27 m

TRIÂNGULO Nº 30

Dourado	$47^{\circ} 54' 55,68''$	$\epsilon = 0,92''$
Peixe	$63^{\circ} 08' 51,89''$	$W = - 0,67''$
Santana	$68^{\circ} 56' 12,68''$	

Dourado - Santana	21.598,73 m
Santana - Peixe	17.966,94 m
Peixe - Dourado	22.591,56 m

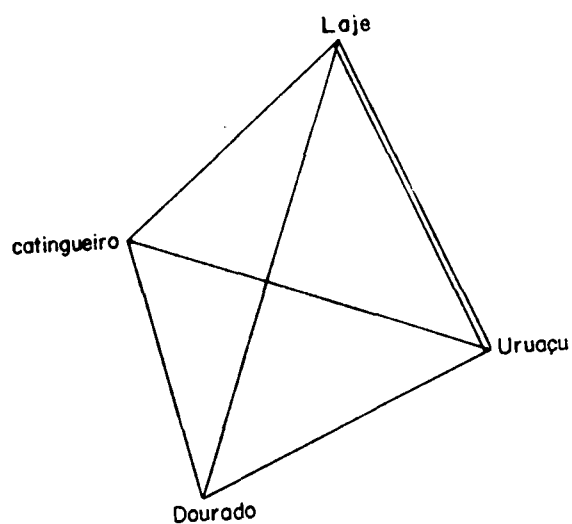


Fig.12 - Sétima Figura

TRIÂNGULO Nº 31

Catingueiro	$56^{\circ} 55' 22,71''$	$\epsilon = 0,91''$
Dourado	$78^{\circ} 50' 56,74''$	$W = - 0,55''$
Uruaçu	$44^{\circ} 13' 40,91''$	

Catingueiro - Uruaçu	24.473,62 m
Uruaçu - Dourado	20.901,96 m
Dourado - Catingueiro	17.399,20 m

TRIÂNGULO Nº 32

Dourado	$46^{\circ} 28' 24,91''$	$\epsilon = 1,18''$
Uruaçu	$90^{\circ} 27' 26,18''$	$W = 0,49''$
Laje	$43^{\circ} 04' 10,58''$	

Dourado - Laje	30.607,37 m
Laje - Uruaçu	22.192,74 m
Uruaçu - Dourado	20.901,96 m

TRIÂNGULO Nº 33

Uruaçu	$46^{\circ} 13' 45,27''$	$\epsilon = 1,00''$
Laje	$73^{\circ} 25' 04,57''$	$W = 0,14''$
Catingueiro	$60^{\circ} 21' 11,30''$	

Uruaçu - Catingueiro	24.473,62 m
Catingueiro - Laje	18.439,57 m
Laje - Uruaçu	22.192,74 m

TRIÂNGULO Nº 34

Laje	$30^{\circ} 20' 53,99''$	$\epsilon = 0,73''$
Catingueiro	$117^{\circ} 16' 34,01''$	$W = - 0,90''$
Dourado	$32^{\circ} 22' 31,83''$	

Laje - Dourado	30.607,44 m
Dourado - Catingueira	18.439,57 m
Catingueiro - Laje	17.399,24 m

ANEXO 4

COORDENADAS APROXIMADAS

PLANILHA DO CÁLCULO DO TRANSPORTE DE COORDENADAS APROXIMADAS SOBRE O ELIPSÓIDE; FORMULÁRIO:

"LATITUDE MÉDIA DE GAUSS"

VÉRTICES		ÂNGULOS OBSERVADOS	AZIMUTE	DISTÂNCIA (m)	LATITUDE (S)	LONGITUDE (W)
ESTACIONADO	VISADO					
		0' "	0' "		0' "	0' "
S. João	Porteirinha	72 46 53,09	355 16 57,47	24 172,42	15 05 27,40	48 47 48,89
Porteirinha	Passa Três	102 59 34,51	278 16 49,43	22 077,11	15 03 43,63	49 00 00,29
Passa Três	Tomé	163 04 56,30	261 24 56,00	26 472,07	15 05 51,72	49 14 36,93
Tomé	Nortelândia	239 16 22,55	320 45 06,60	19 951,84	14 57 28,89	49 21 39,24
Nortelândia	Espia	253 44 53,49	34 31 49,63	21 176,84	14 48 01,19	49 14 57,95
Espia	Estiva	88 20 21,58	302 50 28,13	11 211,27	14 44 43,32	49 20 12,83
Estiva	Dourado	276 30 55,24	39 22 43,67	13 143,17	14 39 12,73	49 15 34,22
Dourado	Uruaçu	206 29 31,71	65 51 04,67	20 901,96	14 34 34,26	49 04 57,16
Uruaçu	Laje	90 27 26,18	336 15 50,07	22 192,95	14 23 33,20	49 09 55,23
Laje	Catingueiro	73 25 04,57	229 42 09,23	18 439,57	14 30 01,11	49 17 45,02
Catingueiro	Peixe	217 47 06,19	267 31 12,59	11 582,27	14 30 17,32	49 24 11,47
Peixe	Santana	112 22 07,73	199 54 57,10	17 966,94	14 39 26,92	49 27 36,08
Santana	Pontinha	194 19 28,32	214 15 16,91	19 942,76	14 48 23,14	49 33 51,61
Pontinha	Europa	138 19 24,72	172 36 17,09	31 998,77	15 05 35,57	49 31 33,60
Europa	Jenipapo	174 01 59,41	166 37 40,92	21 886,36	15 17 08,31	49 28 43,86
Jenipapo	Serrinha	96 31 44,48	83 08 40,95	23 059,66	15 15 38,40	49 15 56,62
Serrinha	São Pedro	183 28 03,15	86 33 21,98	22 404,00	15 14 54,26	49 03 27,21
São Pedro	São João	196 04 21,29	102 34 26,09	30 708,65	15 18 31,14	48 46 42,51

ANEXO 5

PROGRAMA E SUB-ROTINAS

```

C *****
C *****
C **      O PRESENTE PROGRAMA AJUSTA REDES DE TRIANGULACAO
C **      GEODESICA PELO METODO DE VARIAÇAO DE COORDENADAS
C **      COM E SEM INJUNCOES INICIAIS ITERATIVAMENTE.
C **      AUTOR: FRANCISCO H. S. MACRO
C **      DADOS INICIAIS:
C **      -A.....SEMI-EIXO DO ELIPSOIDE;
C **      -ALFA.....INVERSO DO ACHATEAMENTO DO ELIPSOIDE;
C **      -I, J, K...N. DOS VERT. QUE ORIGINAM TRIANGULOS;
C **      -NA.....NUMERO DE ANGULOS INDEPENDENTES;
C **      -NAZ.....NUMERO DE AZIMUTHES DE LAPLACE;
C **      -NB.....NUMERO DE BASES;
C **      -NMIT.....NUMERO MAXIMO DE ITERACOES;
C **      -NOBS.....NUMERO DE EQUACOES DE OBSERVACAO;
C **      -NPAR.....NUMERO DE PARAMETROS;
C **      -NV.....NUMERO DE VERTICES;
C **      -NVF.....NUMERO DE VERT. C/COORD. CONHECIDAS;
C **      -OBS.....VALORES OBSERVADOS (ANGULOS IJK, BA-
C **      SES IJ, AZIMUTHES IJ E COORDENADAS DE
C **      DE VERTICES AJUSTADOS;
C **      -VAR.....VARIANCIA DAS OBSERVACOES;
C **      -XC.....COORDENADAS GEOGRAFICAS APROXIMADAS;
C **      OBSERV.: ESTE PROGRAMA TRABALHA COM MATRIZES,
C **      PORTANTO, DEVE SER RESPEITADO O DI-
C **      MENSIONAMENTO ABAIXO:
C **      DIMENSION AA(NPAR), AL(NOBS), AN(NPAR,NPAR),
C **      ATFL(NPAR), I(NOBS), J(NOBS), K(NOBS), OBS
C **      (NOBS), P(NOBS), VAR(NOBS), XA(NPAR), XAA
C **      (NPAR), XC(NPAR), XE(NPAR), XMER(NV), XC(NPAR),
C **      XEVER(NV), ZA(NPAR,NPAR), ZB(NV), ZC(NPAR),
C **      ZD(NPAR).
C **
C **      PORIC ALFCE, OUT/82
C **
C *****
C *****
C IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
C DIMENSION AA(36), AL(70), AN(36,36), ATFL(36), B(36),
C 1EMPAR(36), I(70), J(70), K(70), OBS(70), P(70), VAR(70),
C 2XA(36), XAA(36), XC(36), XMER(18), XO(36), XEVER(18),
C 3ZA(36,36), ZB(35), ZC(36), ZD(36), XE(36), ZE(36)
C.....LEITURA DOS DADOS INICIAIS.....
C READ (2,160) A, ALFA, NA, NAZ, NB, NMIT, NOBS
C 1NPAR, NV, NVF
C.....LEITURA DAS VARIANCIAS DAS OBSERVACOES.....
C READ (2,160) VANG, VAZ, VBAS, VEF
C.....LEITURA DAS COORDENADAS APROXIMADAS E TRANSFORMACAO
C DAS MESMAS PARA RADIANOS.....
C RU=206264.806247; NPARF=NVF*2
C DO 10 II=1,NV
C READ (2,160) XO(2*II-1), XC(2*II)
C GMS1=XO(2*II-1); CALL GMSR(GMS1,RD); XA(2*II-1)=RD
C GMS2=XC(2*II); CALL GMSR(GMS2,RD); XA(2*II)=RD
10 CONTINUE

```

```

C.....LEITURA DAS OBSERVACOES ANGULARES, TRANSFORMACAO DAS
C.....MESMAS PARA RADIANS E MONTAGEM DO VETOR DOS PESOS..
      DO 20 N=1,NA
      READ (2,160) I(N), J(N), K(N), OBS(N)
      GMS=OBS(N); CALL GMSR (GMS,RD); OBS(N)=RD
20      P(N)=1./VANG
C.....LEITURA DAS OBSERVACOES AZIMUTAIS DE LAPLACE,
C.....TRANSFORMACAO DAS MESMAS PARA RADIANS E CON-

C.....CONTINUACAO DA MONTAGEM DO VETOR DOS PESOS.....
      IF (NAZ.EQ.0) GO TO 35
      DO 30 N=1,NAZ
      READ (2,160) I(N+NA), J(N+NA), OBS(N+NA)
      GMS=OBS(N+NA); CALL GMSR(GMS,RD); OBS(N+NA)=RD
      P(N+NA)=1./VAZ
30      CONTINUE
C.....LEITURA DAS MEDIDAS DAS BASES E CONTINUACAO
C.....DA MONTAGEM DO VETOR DOS PESOS.....
35      IF (NB.EQ.0) GO TO 45
      DO 40 N=1,NB
      READ (2,160) I(N+NA+NAZ), J(N+NA+NAZ), OBS(N+NA+NAZ)
      P(N+NA+NAZ)=1./VBAS
40      CONTINUE
C.....LEITURA DO NUMERO DO VERTICE DE COORDENADAS CONHE-
C.....CIDAS E CONTINUACAO DA MONTAGEM DO VETOR DOS PESOS..
45      IF (NVF.EQ.0) GO TO 55
      DO 50 N=1,NVF
      NS=2*N+NA+NAZ+NB; NP=2*N-1+NA+NAZ+NB
      READ (2,160) I(NS)
      I(NP)=2*I(NS)-1; I(NS)=2*I(NS)
      OBS(NP)=XA(I(NP)); OBS(NS)=XA(I(NS))
      P(NS)=1./VPF; P(NP)=1./VEF
50      CONTINUE
C.....CALCULO DO QUADRADO DA EXCENTRICIDADE.....
55      E2=2./ALFA-1./ALFA**2
C.....IMPRESSAO DOS PARAMETROS ARBITRARIOS.....
      CALL TITULO (0,NAZ,NB,NVF)
      MNV=NV/2
      DO 60 N=1,MNV
      N1=N; N2=N+MNV
      WRITE (3,165) N1, XO(2*N-1), XO(2*N), N2,
      1XO(2*N-1+NV), XO(2*N+NV)
60      CONTINUE
C.....INICIO DO LOOP ITERATIVO.....
      DO 150 M=1,NMIT
      DO 65 L=1,NPAR
      ATPL (L)=0.
      DO 65 LL=1,NPAR
      AN(L,LL)=0.
65      CONTINUE
      VIV=0.; VPV=0.

```

```

C.....CALCULO DOS RAIOS DAS SECÇÕES MERIDIANA E PRIMEIRO
C.....VERTICAL DOS VERTICES, DAS DISTÂNCIAS, DOS AZIMU -
C.....TES E CONTRA-AZIMUTES, DOS ÂNGULOS E MONTAGEM DAS
C.....EQUAÇÕES NORMAIS PARA ÂNGULOS.....
DO 70 L=1,NV
  FIJ=XA(2*L-1)
  CALL RAIOS (A,E2,FIJ,XN,XM)
  XMER(L)=XM
  XPVER(L)=XN
70  CONTINUE
  DO 80 L=1,NA
    LF=L
    CALL DIMED (LP,1,J,K,NOBS,XA,NPAR,FIJ,FIK,ALIJ,
      1ALIK,DFIJ,DFIK,SDFIJ,SDFIK,SALIJ,SALIK)
    CALL RAIOS (A,E2,FIJ,XN,XM)
    CALL AZDIS (XN,XM,FIJ,ALIJ,DFIJ,SALIJ,SDFIJ,
      1AZIJ,DIJ,AZJI)
    CALL RAIOS (A,E2,FIK,XN,XM)
    CALL AZDIS (XN,XM,FIK,ALIK,DFIK,SALIK,SDFIK,
      1AZIK,DIK,AZKI)
    ACAL=AZIK-AZIJ
    IF (ACAL.LT.0) ACAL=ACAL+8.*DATAN(1.D0)
    IF (ACAL.GT.(8.*DATAN(1.D0))) ACAL=ACAL-8.
      1*DATAN(1.D0)
    AL(L)=(OBS(L)-ACAL)*R0
    CALL GERA (AZIJ,AZIK,DIJ,DIK,AZJI,AZKI,
      1LP,1,J,K,NOBS,NV,XA,XMER,XPVER,AA,NPAR)
    CALL PATATA (AA,P,AL,LP,NPAR,NOBS,AN,ATPL)
80  CONTINUE
C.....MONTAGEM DAS EQUAÇÕES NORMAIS A PARTIR DOS
C.....AZIMUTES DE LAPLACE.....
IF (NAZ.EQ.0) GO TO 95
DO 90 L=1,NAZ
  LP=NA+L
  CALL DIMED (LP,1,J,K,NOBS,XA,NPAR,FIJ,FIK,ALIJ,
    1ALIK,DFIJ,DFIK,SDFIJ,SDFIK,SALIJ,SALIK)
  CALL RAIOS (A,E2,FIJ,XN,XM)
  CALL AZDIS (XN,XM,FIJ,ALIJ,DFIJ,SALIJ,SDFIJ,
    1AZIJ,DIJ,AZJI)
  CALL GERAZ (AZIJ,AZJI,LP,1,J,XA,NV,XMER,XPVER,
    1AA,NPAR,NOBS,DIJ)
  AL(LP)=(OBS(LP)-AZIJ)*R0
  CALL PATATA (AA,P,AL,LP,NPAR,NOBS,AN,ATPL)
90  CONTINUE
C.....MONTAGEM DAS EQUAÇÕES NORMAIS A PARTIR DAS
C.....MEDIDAS DAS BASES.....
95  IF (NB.EQ.0) GO TO 105
DO 100 L=1,NB
  LF=L+NA+NAZ
  CALL DIMED (LP,1,J,K,NOBS,XA,NPAR,FIJ,FIK,ALIJ,
    1ALIK,DFIJ,DFIK,SDFIJ,SDFIK,SALIJ,SALIK)
  CALL RAIOS (A,E2,FIJ,XN,XM)
  CALL AZDIS (XN,XM,FIJ,ALIJ,DFIJ,SALIJ,SDFIJ,
    1AZIJ,DIJ,AZJI)
  CALL GERAD (AZIJ,AZJI,LP,1,J,XA,NV,XMER,
    1XPVER,AA,NPAR,NOBS)
  AL(LP)=OBS(LP)-DIJ
  CALL PATATA (AA,P,AL,LP,NPAR,NOBS,AN,ATPL)
100 CONTINUE

```

```

C.....MONTAGEM DAS EQUACOES NORMAIS A PARTIR DOS
C.....PONTOS DE COORDENADAS CONHECIDAS.....
105      IF (NVF.EQ.0) GO TO 115
          DO 110 L=1,NPARF
          DO 107 LL=1,NPAR
107      AA(LL)=0.
          LP=NA+NAZ+NB+L; AL(LP)=0.; AA(1(LP))=1.
          CALL PATATA (AA,P,AL,LP,NPAR,NOBS,AN,ATPL)
110      CONTINUE
115      NN=NPAR-1
          CALL PSEUDO (AN,ZA,ZB,ZC,ZD,NPAR,NPAR,NN)
C.....DETERMINACAO DOS PARAMETROS AJUSTADOS.....
          CALL AB (AN,ATPL,XC,NPAR,NPAR,1)
          DO 117 LL=1,NPAR
117      XF(LL)=XC(LL)/RC
          CALL SOMAT (XA,XF,XAA,NPAR,1)
C.....DETERMINACAO DA VARIANCIA DA UNIDADE DE PESO
C.....A POSTERIORI E CALCULO DO TRACO DA MATRIZ
C.....VARIANCIA COVARIANCIA DOS PARAMETROS AJUST....
          CALL PROINT (XC,ATPL,VTV,NPAR)
          CALL PROINF (AL,P,AL,VPV,NOBS)
          SIGMA2=(VPV-VTV)/(NOBS-NPAR)
          SIGMA1=SIGMA2**0.5
          TRACOP=0.
          DO 120 L=1,NPAR
          AN (L,L)=AN (L,L)*SIGMA2
          EMPAR(L)=AN(L,L)**0.5
120      TRACOP=TRACOP+AN(L,L)
          PM=DSQRT(TRACOP/NPAR)
C.....TRANSFORMACAO DOS PARAMETROS EM GRAUS DECIMAIS
C.....E IMPRESSAO DOS MESMOS.....
          LF=M
          CALL TITULO (LP,NAZ,NB,NVF)
          DO 130 L=1,NV
          N1=L
          GMS1=XAA(2*L-1); GMS2=XAA(2*L)
          CALL RGMS (GMS1); CALL RGMS (GMS2)
          WRITE (3,170) N1, GMS1, GMS2, EMPAR(2*L-1),
          1EMPAR(2*L)
130      CONTINUE
          WRITE (3,180) SIGMA2, SIGMA1, TRACOP, PM
C.....PRESERVACAO DOS RESULTADOS CALCULADOS.....
          DO 140 L=1,NPAR
140      XA(L)=XAA(L)
150      CONTINUE
160      FORMAT (10G)
165      FORMAT (20X,2(5X,I2,1X,2(3X,F12.8)))
170      FORMAT (25X,I2,1X,2(4X,F12.8),3X,2(F7.4,7X))
180      FORMAT (///,29X,'VARIANCIA DA UNIDADE DE '
          1' PESO A POSTERIORI: (SIGMA2)= ',G,/,74X,
          2'(SIGMA1)= ',G,///,30X,'TRACO DA M-V C '
          3'DOS PARAMETROS AJUSTADOS: ',G,///,35X,
          4'ERRO MEDIO: ',G)
190      CALL EXIT
          END

```



```

C.....PRODUTO DE MATRIZES (AB).....
SUBROUTINE AB (A,B,R,L,M,N)
IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
DIMENSION A(L,M), B(M,N), R(L,N)
DO 5 I=1,L
DO 5 J=1,N
R(I,J)=0.
DO 5 K=1,M
5 R(I,J)=R(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
RETURN
END

C.....INVERSAO DE MATRIZES (VERSCL)
SUBROUTINE VERSCL (A,B,I)
IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
DIMENSION A(I,1), B(I)
IF (A(1,1).EQ.0.D0) GO TO 30
20 IF (I.EQ.1) GO TO 10
IM=I-1
DO 5 K=1,I
DO 2 J=1,IM
2 B(J)=A(1,J+1)/A(1,1)
B(I)=1./A(1,1)
DO 4 L=1,IM
DO 3 J=1,IM
3 A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(I)
4 A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
DO 5 J=1,I
5 A(I,J)=B(J)
RETURN
10 A(1,1)=1./A(1,1)
30 WRITE (3,100)
100 FORMAT (1X,'A(1,1)=0')
RETURN
END

C.....ADICAO DE MATRIZES (SOMAT).....
SUBROUTINE SOMAT (A,B,C,I,J)
IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
DIMENSION A(I,J), B(I,J), C(I,J)
DO 20 L = 1,I
DO 20 K = 1,J
C(L,K) = A(L,K)+B(L,K)
20 CONTINUE
RETURN
END

C.....CALCULO DE ATPA E ATPL.....
SUBROUTINE FATATA (AA,P,AL,LP,NPAR,NOBS,AN,ATPL)
IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
DIMENSION AA(NPAR), P(NOBS), AL(NOBS),
1AN(NPAR,NPAR), ATPL(NPAR)
DO 10 I = 1,NPAR
ATPL(I)=ATPL(I)+AA(I)*P(LP)*AL(LP)
DO 10 J = 1,NPAR
10 AN(I,J) = AN(I,J)+AA(I)*AA(J)*P(LP)
RETURN
END

```

C.....TRANSFORMACAO DE GMS EM RADIANOS.....

```

SUBROUTINE GMSR (GMS,RD)
IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
RAD=DATAN(1.D0)/45.
A=GMS
B=(GMS-IDINT(A))*100.
D=(B-IDINT(B))*100.
RD=(D/3600.+IDINT(B)/60.+IDINT(A))*RAD
RETURN
END

```

C.....TRANSFORMA RADIANOS EM UNIDADES SEXAGESIMAS.....

```

SUBROUTINE RGMS (GMS)
IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
RD=GMS*45./DATAN(1.D0)
IG=RD
AM=(RD-IG)*60.
M=AM
AS=(AM-M)*60.
GMS=IG+M/100.+AS/10000.
RETURN
END

```

C.....CALCULA LATITUDE MEDIA, SEMI E DIFERENCA

```

C.....DE LATITUDE E LONGITUDE.....
SUBROUTINE DIMEC (L,I,J,K,NCBS,XA,NPAR,FIJ,FIK,
1ALIJ,ALIK,DFIJ,DFIK,SDFIJ,SDFIK,SALIJ,SALIK)
IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
DIMENSION I(NCBS), J(NCBS), K(NCBS), XA(NPAR)
FIJ=(XA(2*I(L)-1)+XA(2*J(L)-1))/2.
ALIJ=XA(2*J(L))-XA(2*I(L))
DFIJ=XA(2*J(L)-1)-XA(2*I(L)-1)
SDFIJ=DFIJ/2.; SALIJ=ALIJ/2.
IF (K(L)) 30, 30, 20
20 FIK=(XA(2*I(L)-1)+XA(2*K(L)-1))/2.
ALIK=XA(2*K(L))-XA(2*I(L))
DFIK=XA(2*K(L)-1)-XA(2*I(L)-1)
SDFIK=DFIK/2.; SALIK=ALIK/2.
30 RETURN
END

```

C.....CALCULO DOS RAIOS DAS SECÇÕES MERIDIANA

C.....E PRIMEIRO VERTICAL.....

```

SUBROUTINE RAIOS (A,E2,FIJ,XN,XF)
IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
B=DSIN(FIJ)**2.
XN=A*(1.-E2)/(1.-E2*B)**1.5
XF=A/(1.-E2*B)**0.5
RETURN
END

```

```

C.....ELABORA CABECALHOS AO IMPRIMIR RESULTADOS.....
SUBROUTINE TITULO (M,NAZ,NB,NVF)
IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
IF (((NAZ.EQ.0).OR.(NB.EQ.0)).OR.(NVF.EQ.0))
1. AND.(NVF.LT.2)) GO TO 30
10  FORMAT ('1',27X,'AJUSTAMENTO DE REDE DE TRIANGU',
1'LACAO GEODESICA PELO METODO',/,27X,57('='),/,
231X,'DE VARIACAO DE COORDENADAS COM INJUNCOES ',
3'INICIAIS',/,31X,49('='),///)
WRITE (3,10)
GO TO 40
20  FORMAT ('1',27X,'AJUSTAMENTO DE REDE DE TRIANGU',
1'LACAO GEODESICA PELO METODO',/,27X,57('='),/,
231X,'DE VARIACAO DE COORDENADAS SEM INJUNCOES ',
3'INICIAIS',/,31X,49('='),///)
WRITE (3,20)
40  IF (M.GT.0) GO TO 60
50  WRITE (3,70)
GO TO 90
60  WRITE (3,80) M
70  FORMAT (48X,'COORDENADAS APROXIMADAS',/,48X,
123('='),///,20X,2(4X,'VERT.',4X,'LATITUDE',
27X,'LONGITUDE'),///)
80  FORMAT (53X,'PASSO ',11,/,53X,7('='),///,24X,
1'VERT.',5X,'LATITUDE',7X,'LONGITUDE',4X,
2'ENQ. LAT.',4X,'ENQ. LONG.',///)
90  RETURN
END

C.....CALCULA DISTANCIA, AZIMUTE E CONTRA-AZIMUTE
C.....ENTRE DOIS PONTOS SOBRE O ELIPSOIDE (VALIDA
C.....PARA DISTANCIAS < 100KM).....
SUBROUTINE AZDIS (XN,XM,FIJ,ALIJ,DFIJ,SALIJ,
1SDFIJ,AZIJ,DIJ,AZJI)
IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
PI=DATAN(1.D0)*4.
XIJ=ALIJ*XN*DCOS(FIJ)
YIJ=DFIJ*XM*DCOS(SALIJ)
AZIM=DATAN2 (XIJ,YIJ)
IF (AZIM.LT.0) AZIM=AZIM+2*PI
CAZ=DATAN(DSIN(FIJ)*DSIN(SALIJ)/DCOS
1(SDFIJ)/DCOS(SALIJ))
AZIJ=AZIM-CAZ
DIJ=YIJ/DCOS(AZIM)
AZJI=AZIM+CAZ+PI
IF (AZJI.GT.(2*PI)) AZJI=AZJI-2*PI
RETURN
END

```

```

C.....CALCULA E GERA OS ELEMENTOS DA MATRIZ A,
C.....LINHA A LINHA, QUANDO AS EQUACOES DE
C.....OBSERVACAO SAO DE DISTANCIAS.....
      SUBROUTINE GERAD (AZIJ,AZJI,LF,1,J,XA,NV,
      1XMER,XPVER,AA,NPAR,NOBS)
      IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION AA(NPAR), I(NOBS), J(NOBS),
      1XA(NPAR), XMER(NV), XPVER(NV)
      RO=206264.806247
      DO 10 JJ=1,NPAR
10      AA(JJ)=0.
      AA(2*I(LF)-1)=-XMER(I(LF))*DCOS(AZIJ)/RO
      AA(2*I(LF))=-XPVER(I(LF))*DSIN(XA(2*I(LF)
      1-1))*DSIN(AZIJ)/RO
      AA(2*J(LF)-1)=-XMER(J(LF))*DCOS(AZJI)/RO
      AA(2*J(LF))=-XPVER(J(LF))*DSIN(AZJI)*
      1DCOS(XA(2*J(LF)-1))/RO
      RETURN
      END
C.....CALCULA E GERA OS ELEMENTOS DA MATRIZ A,
C.....LINHA A LINHA, QUANDO AS EQUACOES DE
C.....OBSERVACAO SAO ANGULOS.....
      SUBROUTINE GERAA (AZIJ,AZIK,DIJ,DIK,AZJI,AZKI,
      1L,1,J,K,NOBS,NV,XA,XMER,XPVER,AA,NPAR)
      IMPLICIT REAL *8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION AA(NPAR), I(NOBS), J(NOBS),
      1K(NOBS), XMER(NV), XPVER(NV), XA(NPAR)
      DO 10 JJ=1,NPAR
10      AA(JJ)=0.
      AA(2*I(L)-1)=XMER(I(L))*(DSIN(AZIK)/
      1DIK-DSIN(AZIJ)/DIJ)
      AA(2*I(L))=XPVER(I(L))*DCOS(XA(2*I(L)-1))*
      1(DCOS(AZIJ)/DIJ-DCOS(AZIK)/DIK)
      AA(2*J(L))=XPVER(J(L))*DCOS(AZJI)*DCOS
      1(XA(2*J(L)-1))/DIJ
      AA(2*J(L)-1)=-XMER(J(L))*DSIN(AZJI)/DIJ
      AA(2*K(L)-1)=XMER(K(L))*DSIN(AZKI)/DIK
      AA(2*K(L))=-XPVER(K(L))*DCOS(AZKI)*
      1DCOS(XA(2*K(L)-1))/DIK
      RETURN

```

```

      END
C.....CALCULA E GERA OS ELEMENTOS DA MATRIZ A,
C.....LINHA A LINHA, QUANDO AS EQUACOES DE
C.....OBSERVACAO SAO AZIMUTES DE LAPLACE.....
      SUBROUTINE GERA2 (AZIJ,AZJI,LF,1,J,XA,NV,
      1XMER,XPVER,AA,NPAR,NOBS,DIJ)
      IMPLICIT REAL *8 (A-H, C-2)
      DIMENSION 1(NOBS), J(NOBS), XA(NPAR),
      1XMER(NV), XPVER(NV), AA(NPAR)
      DO 10 JJ=1,NPAR
10      AA(JJ)=0.
      AA(2*1(LP)-1)=XMER(1(LP))*DSIN(AZIJ)/DIJ
      AA(2*1(LP))=-XPVER(1(LP))*DCOS(AZIJ)*CCOS
      1(XA(2*1(LP)-1))/DIJ-DSIN(XA(2*1(LP)-1))
      AA(2*J(LP)-1)=XMER(J(LP))*DSIN(AZJI)/DIJ
      AA(2*J(LP))=-XPVER(J(LP))*DCOS(AZJI)*
      1CCOS(XA(2*J(LP)-1))/DIJ
      RETURN
      END
C.....CALCULA O PROD. INT. DE 2 VETORES PESADOS.....
      SUBROUTINE PROINF (V, P, W, VTPV, J)
      IMPLICIT REAL *8 (A-H, C-2)
      DIMENSION V(J), P(J), W(J)
      DO 10 I=1,J
10      VTPV=VTPV+V(I)*P(I)*W(I)
      RETURN
      END
C.....CALCULA O PRODUTO INTERNO DE DOIS VETORES.....
      SUBROUTINE PROINT (V,W,VTV,J)
      IMPLICIT REAL *8 (A-H, C-2)
      DIMENSION V(J), W(J)
      DO 10 I=1,J
10      VTV=VTV+V(I)*W(I)
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE PSEUDO (AN, ZA, ZB, ZC, ZD, M, N, L)
DIMENSION AN(M,N), ZA(N,M), ZE(M), ZC(M), ZD(L)
S=0.D0
DO 1 I=1,M
1  S=S+AN(I,1)**2
  IF (S.GT.1.D-5) GO TO 4
2  DO 3 J=1,M
3  ZA(1,J)=0.D0
  GO TO 6
4  DO 5 I=1,M
5  ZA(1,I)=AN(I,1)/S
6  DO 19 K=1,L
  KK=K+1
  DO 7 I=1,K
  ZD(I)=0.
  DO 7 J=1,M
7  ZD(I)=ZD(I)+ZA(I,J)*AN(J,KK)
  DO 9 I=1,M
  ZC(I)=0
  DO 8 J=1,K
8  ZC(I)=ZC(I)+AN(I,J)+ZB(J)
9  ZC(I)=AN(1,KK)-ZC(I)
  DO 10 I=1,M
  IF (DABS(ZC(I)).GT.1.D-5) GO 10 14
10 CONTINUE
  S=1.D0
  DO 11 I=1,K
11  S=S+ZD(I)**2
  DO 13 I=1,M
  ZB(I)=0.
  DO 12 J=1,K
12  ZB(I)=ZB(I)+ZD(J)*ZA(J,I)
13  ZB(I)=ZB(I)/S
  GO TO 17
14  S=0.
  DO 15 I=1,M
15  S=S+ZC(I)**2
  DO 16 I=1,M
16  ZB(I)=ZC(I)/S
17  DO 22 J=1,M
  DO 18 I=1,K
18  ZA(I,J)=ZA(I,J)-ZD(I)*ZB(J)
22  ZA(K+1,J)=ZB(J)
19  CONTINUE
  DO 20 I=1,M
  DO 20 J=1,N
20  AN(I,J)=ZA(I,J)
  RETURN
  END

```